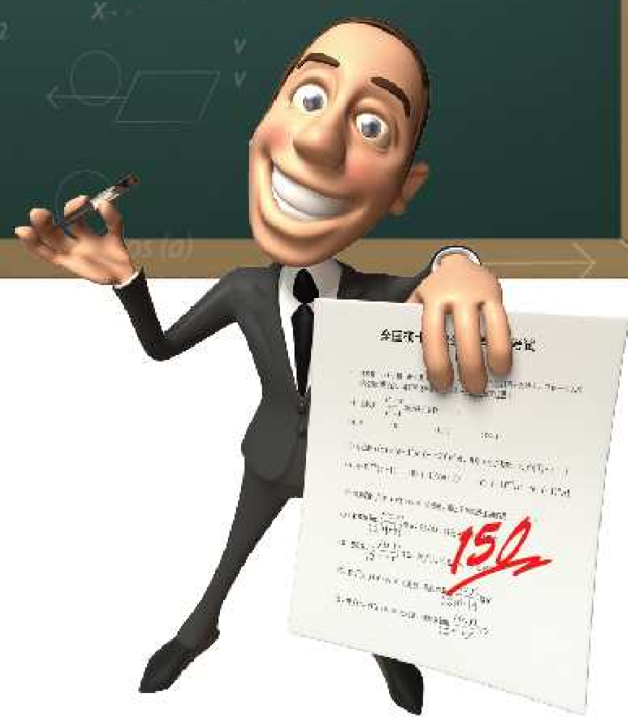
考研数学三部曲之

大话线性代数

潘鑫 著



清华大学出版社
北 京

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

内 容 简 介

本书是一本独特的线性代数参考书，以“盖楼”为目标轻松构筑整个线性代数体系。读者每阅读完一章，就是盖完了大楼的一层，而每层中又分为“砖”和“房间”两部分，先运来“砖”再搭建“房间”，这种安排内容的方式使得全书充满了趣味性。

本书的特色除了趣味性之外，还有三个“非常”：语言非常通俗易懂，逻辑非常清晰，例题非常丰富。

本书的主要内容包括高等院校线性代数课程的所有内容，针对考研数学的特殊性进行了强化，同时对于一些传统课本中的重点、难点、疑点以及最容易被忽视的一些潜在要点做出了全新诠释，另外，由于作者常年从事考研培训，本书还包括相当多的不传之秘——考研数学的套路。

本书作者就职于著名培训机构，本书正是多年培训生涯的总结，毫无保留。

三类读者（哪怕零基础）最适合阅读本书：正在准备研究生入学考试的读者；正在准备学校期末考试的在校大学生；工作后需要补学或温习线性代数的读者（如程序员等）。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。
版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

考研数学三部曲之大话线性代数 / 潘鑫著. —北京： 清华大学出版社，2014

ISBN 978–7–302–34685–2

I. ①考…　II. ①潘…　III. ① 线性代数–研究生–入学考试–自修参考资料　IV. ① 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 290837 号

责任编辑：栾大成
封面设计：
责任校对：徐俊伟
责任印制：
出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，　http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：
装 订 者：
经　　销：全国新华书店
开　　本：188mm×260mm　　印　张：24.5　　插页：1　　字　数：587 千字
版　　次：2014 年 4 月第 1 版　　印　次：2014 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1~4000
定　　价：49.00 元

产品编号：054555-01

前 言

我的创作初衷

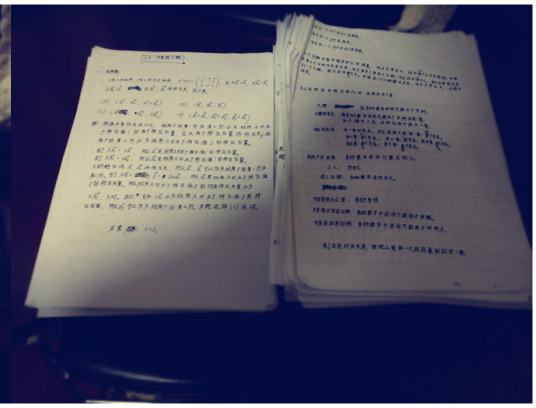
大家好，我叫潘鑫，江湖人称老潘，网络流传：**考研信老潘，就这么简单！**

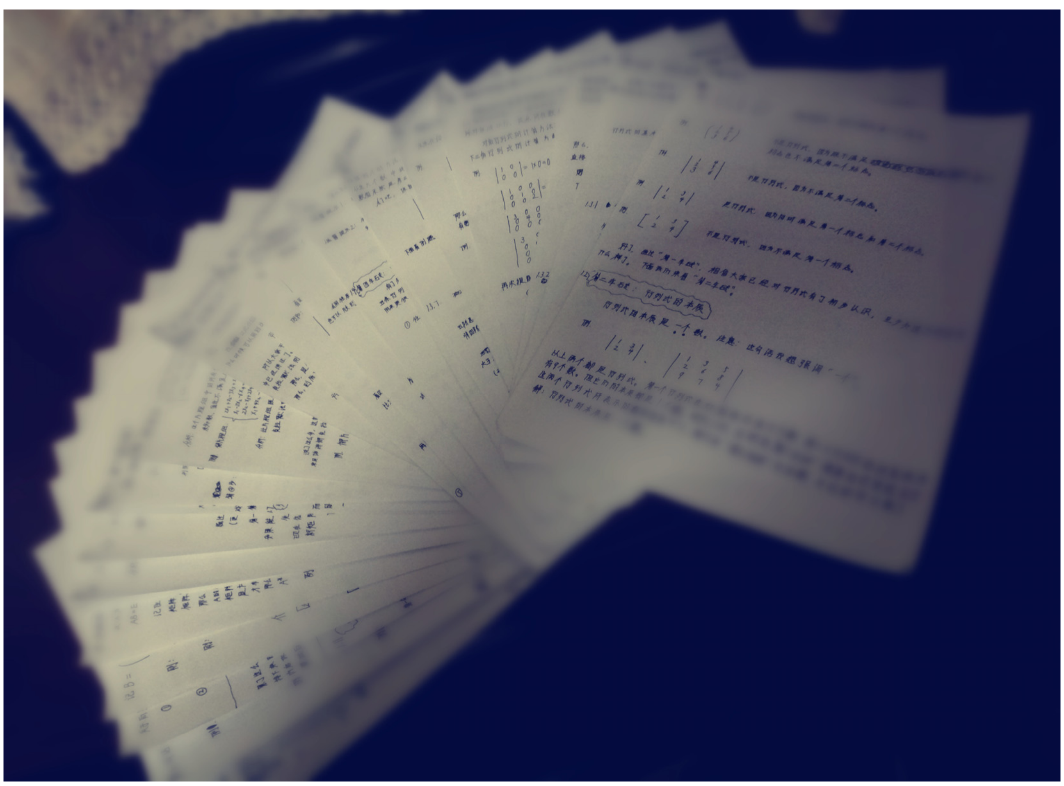
回想我自己的考研历程，在准备研究生考试数学科目的过程中，买过不少辅导书。我想大家应该听说过李永乐老师编写的《考研数学复习全书》以及陈文灯老师编写的《考研数学复习指南》吧。这两本书的确是写得非常好，对我的帮助很大。然而，当时我身边有很多数学基础很一般的考研同学，他们谈到，由于自己的基础一般，因此对于这两本书中所讲的内容并不能完全看懂。当时我就在想，对于这部分考生来讲，他们最需要的是这样一本书：既能完全达到考研数学的难度，同时全书所有的表达方式又能充分照顾到毫无基础的初学者，同时还能提供一些考研的套路和经验……。那时，我开始有了自己写一本考研数学辅导书的想法。

在我本人研究生开学（清华大学）之前，我同时在五个考研辅导机构担任讲师，主讲高等数学、线性代数和概率论与数理统计。由于我讲课时逻辑清晰、语言通俗，加之每讲一个知识点后我都会大量举例，从而使得就算是零基础的学员也能够听懂，因此很荣幸地受到了学员的一致好评。很快，我开始大班授课，在 2013 年的全国硕士研究生入学统一考试的考场内，坐着我的很多位学员。据学员反馈，我所有的学员中（无论基础好坏）有 80%的学员考到了 100 分以上，50%的学员在 120 分以上。他们反馈给我成绩的同时，不约而同地提出我应该把所讲的内容编写成书，好让更多的同学受益。于是我出书的想法更进一步地激发。

研究生开学后，清华大学的很多老师都提到了“创新”这个词——的确，创新是一个民族的灵魂。当时我立刻想到了出书的事情，知识是固定的，教学模式则是可以创新的。目前国内还没有一本既能达到考研难度又能使得无论什么基础的考生都能看懂的考研数学教辅书。老师的话使得我创作图书的冲动更加强烈。

随后，我手写了一份完完全全面向初学者的线性代数讲义，并且我让我正在上高二的一个数学基础很一般的弟弟看，没想到他对我的讲义爱不释手，只用了一周，就看完了。我拿来一份普通大学的期末线性代数考试卷子让他做。毫不夸张地说，满分！那时，我的想法已经十分坚定了：我要写书。

最后，借用一句在我出书过程中对我帮助很大的超级畅销书《大话设计模式》的作者程杰的话：现实总比理想来得更“现实”。的确，写书不是一件容易的事情，有很多很多的困难都需要去克服。同学们，在你们的考研复习道路上更是充满荆棘，困难重重。金鳞岂是池中物，一遇风云便化龙。希望本书能够帮助你们在通往成功的道路上一路披荆斩棘，帮助你们逢山开路、遇水搭桥，最终在考研中取得好成绩。

本书定位

本书的定位是：一本适合读者自学线性代数的书籍（无论读者是何基础）。本书与传统教材大不相同：语言非常通俗易懂，逻辑十分严谨，本书中所涉及到的每个知识点（无论多简单的知识点）几乎都有举例，而且知识点相互串联，逐渐“织”出线性代数整个体系。这“三斧子”使得读者完全不用担心有看不懂的地方。所以，本书定位为自学用书、教辅以及考研冲刺速成书。

所谓教材，是老师上课时所使用的书籍。大多数教材不会把每个知识点都讲解得非常细，目的是要在课堂上给学生留有充分的思考空间，锻炼同学们的思维；而教辅书呢，顾名思义，是辅助教材而使用的书籍。教辅书不能脱离教材，如果一个基础很薄弱的学生直接看教辅书也是会很吃力的。而本书

既非教材，也非教辅，是一本十分“纯正”的自学用书。为了能让读者实现真正的自学，书中每一个细节也不放过，每个知识点和例题都配有非常通俗易懂的解释（甚至书中所写的很多话都是读者很自然可以想到的），这样一来就可以保证无论什么基础的读者，都能够看懂本书。同时本书又是针对考研数学线性代数的，因此逻辑上也是非常清晰的。相信读者阅读本书后会有一种爱不释手的感觉。

本书特色

1. 充满趣味

本书以“盖楼”为大的背景。读者每阅读完一章，就是盖完了大楼的一层，而每层中又分为“砖”和“房间”两部分，先运来“砖”再搭建“房间”，从“砖”到“房间”再到“楼层”直至整个线性代数大楼的竣工。这种安排内容的方式使得全书充满趣味性的同时也更有逻辑性。

2. 语言非常通俗易懂

大部分考研数学类书籍，都是十分规范化的，有点像“八股文”，读者需要逐字去琢磨。而最为高级的表达方式就是：用最容易理解的文字，去讲解最难理解的知识，而不需要读者再去思考如此严谨晦涩的语言——这正是本书的最大亮点。

本书的所有语言，从定义定理的解释，到例题的解析，再到每章习题的分析，都非常通俗易懂，让人感觉就像是在读一本童话故事或者武侠小说。让读者不仅能看懂书，更乐于去看书，从而使得读者不仅掌握了相应的知识也节省了学习时间，同时，还加深了印象。

3. 逻辑非常清晰

本书的逻辑从头到尾都是非常清晰的。具体来说，本书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点，并且几乎所有题目的每一步解答都详细注明了来源（如：这一步是根据第 1 章的第五车砖）。另外，大家知道，做一道题可能会同时用到很多个不同章节的知识点。我见过的很多考研辅导书中都存在这样一种现象：讲完知识点一了，然后下面有配套的例题，而此例题中不但用到了刚讲完的知识点一，而且还用到了没讲的知识点二，而题中并没有注明用到了还没有讲的知识点二，这样一来，许多读者就不明白了，思考了很长时间，以为是忘记了之前的某个知识点，后来才知道原来用到的是后续的知识点。这样的话很浪费时间，也极大地挫伤学习积极性和成就感。而本书在这一点上高度重视，全书的所有习题中极少存在上述现象（可能也就一两道题存在上述现象，但题中都做了说明）。

总结来说，本书所谓的“逻辑非常清晰”体现在如下三个方面：

（1）本书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点。

（2）本书的所有题目的每一步解答都详细注明了来源，全书知识点相互交织、遥相辉映。

（3）本书的所有题目均与知识点完全对应。

4. 例题非常丰富

本书的例题非常丰富。丰富到什么程度呢？就是说其实很多例题按理说根本就是没有必要的（因为知识点太简单了，根本不需要再有例题了），但本书还是写了，这是为什么呢？因为我在教学的过程中，发现了这样一种现象：就算知识点再简单，讲解得再明白，不举例的话，学生心里还是多少会有一些不踏实。基于此，本书所涉及到的知识点几乎都有配套的例题。

本书内容

本书是按照教育部考试中心公布的考研大纲的要求来组织的。

本书的主要内容包括：逆序数，行列式，行列式的计算方法，行列式的性质，代数余子式，克拉默法则，矩阵的定义，矩阵的运算，方阵、对角矩阵、单位矩阵等特殊矩阵，可逆矩阵的定义，求某矩阵的逆矩阵的方法，矩阵的初等变换，初等矩阵，矩阵的秩，矩阵的子式，利用初等行变换来求矩阵的秩，矩阵乘法满足的算律，可逆矩阵与初等矩阵，初等矩阵与初等变换，初等变换与矩阵的秩，初等矩阵的逆矩阵的快捷求法，分块矩阵，对称矩阵与反对称矩阵，向量，线性表出，线性相关与线性无关，向量组的秩，最大无关组，齐次线性方程组的解法与非齐次线性方程组的解法，向量空间，向量正交，正交矩阵，施密特正交法，两个方程组的公共解，同解方程组，特征值与特征向量，特征值与特征向量的求解方法，相似矩阵，对角化，二次型，标准形，规范形，化二次型为标准形、规范形，合同二次型与合同矩阵，正定二次型与正定矩阵等。

本书读者

以下三类读者最适合阅读本书：

（1）正在准备研究生入学考试的读者（无论读者是何基础）。

（2）正在准备学校期末考试的在校大学生（无论读者是何基础）。

（3）工作后需要恶补线性代数的读者（无论读者是何基础）。

我之所以强调“无论读者是何基础”，是因为本书对读者的基础要求很低，几乎就不要求读者有什么基础。如果非要规定一个建议基础，那就是初中的数学基础。所以实际上，适合阅读本书的读者非常广泛。

感谢

本书能够和大家见面，我本人做了很多努力，但只靠我一个人，这本书是根本不能顺利出版的。并非是客套话，而是事实如此。

首先要感谢我的父亲潘建平对我写作本书期间的全力支持。由于本书中的数学符号种类繁多，为了加快速度，我和我的父亲分工，我进行手写（授课习惯，在纸上一个一个字的写才能保证思路连贯），然后由他用 Mathtype 以及 Visio 等软件帮我整理成电子版。工作量相当地大，他经常熬夜到很晚。所以，可以这么说，如果没有父亲的贡献，就没有本书的出版。

超级畅销书《大话设计模式》的作者程杰也给了我非常大的帮助。我创作本书的灵感就来源于程杰的那本《大话设计模式》，程杰本人也给我提了很多的宝贵意见，并且我与清华大学出版社的缘分也是来自程杰。在此，我对程杰表示由衷的感谢。

大家都知道，只有作者是无法完成一本书的出版的。一本书的出版与策划编辑的辛勤劳动是分不开的，本书更是如此。从我与清华大学出版社签订出版合同到书名的敲定再到书中很多细节的修改，我都得到了清华大学出版社的栾大成编辑的鼎力相助。在此我要对栾编辑表达我深深的谢意。

最后，在本书的初稿完成之际，我让我的朋友、亲戚、学员作为首批读者，他们在阅读过程中同样提出了一些意见，这些来自最终读者的意见完善了本书相当多的细节。

在此向所有帮助与支持我的朋友道一声：谢谢！

潘鑫

目　录

超级导读　线性代数大厦建造史（必看） ······ 1

磨刀不误砍柴工。只有把刀磨好了，砍柴时才会事半功倍。

1　考研数学线性代数就是一座大楼 ······ 2

运用比喻，生动形象地为大家展示线性代数之美。

2　帮你盖楼 ······ 4

我是一个小有名气的建筑师，我将和大家一起盖好这座六层的大楼。

3　第 1 章到第 6 章的内容 ······ 4

大家来看看吧，这里有每一章展开后的样子。

4　满分要这样才行 ······ 6

内因才是最重要的，大家要想考高分，就必须按本节所说的这样去做。

5　给大家的话 ······ 6

愿我的话能激励大家在最疲倦、最懈怠的时候，因为责任而坚持，因为担当而无畏。

第 1 章　第一层——行列式 ······ 7

所谓行列式，无非是有行有列的东西。同学们，你们分得清什么是行什么是列吗？如果分得清，就一定能学好行列式！

1.1　第一车砖——行列式长什么样 ······ 8

我们在了解新事物的时候，最好先能对此事物有一个直观的认识。

1.2　第二车砖——行列式的本质 ······ 9

看事物不能只看表面，还要看到事物的本质。

1.3　第三车砖——行列式的基本计算方法 ······ 9

如果大家认为行列式很难计算的话，那么在看完本节之后，一定会有不一样的感受！

1.3.1　特殊行列式的计算 ······ 10　　1.3.2　一般行列式的计算 ······ 13

1.4　第四车砖——行列式的五条性质 …… 17

干一件事情，不光要把它干出来，还要有效率。行列式的五条性质将会使得行列式的计算变得容易。

1.4.1　性质 1 …… 18
1.4.2　性质 2 …… 19
1.4.3　性质 3 …… 19
1.4.4　性质 4 …… 21
1.4.5　性质 5 …… 22

1.5　第五车砖——克拉默法则 …… 23

克拉默法则是什么？它和行列式有什么关系？

1.6　第六车砖——矩阵 …… 29

来看看矩阵与行列式的区别吧，它们可不是同一个东西！

1.7　第七车砖——矩阵的运算 …… 30

矩阵的运算一共有三种，想知道是哪三种吗？

1.7.1　矩阵与矩阵相加 …… 30
1.7.2　数字与矩阵相乘 …… 31
1.7.3　矩阵与矩阵相乘 …… 31

1.8　第八车砖——矩阵的转置 …… 35

矩阵与行列式一样，都可以进行转置，而且无论是行列式还是矩阵，转置指的都是将第一行变为第一列，将第二行变为第二列……

1.9　第九车砖——方阵、对角矩阵、单位矩阵、逆矩阵 …… 36

方阵是特殊的矩阵，对角矩阵是特殊的方阵，而单位矩阵又是特殊的对角矩阵……

1.9.1　方阵 …… 36
1.9.2　对角矩阵 …… 36
1.9.3　单位矩阵 …… 37
1.9.4　逆矩阵 …… 37

1.10　第十车砖——矩阵的向量表示法 …… 39

矩阵可以用向量来表示，到底该怎么表示呢？

1.11　房间 101——关于代数余子式的三句话 …… 40

这三句话太重要了，考研中经常会考到。这是大楼第一层的第一个房间，大家一定要用心去搭建这个房间哦。

1.11.1　第一句话 …… 40
1.11.2　第二句话 …… 41
1.11.3　第三句话 …… 42
1.11.4　真题分析 …… 44

1.12 房间102——克拉默法则的推论 46

克拉默法则前面已经讲过了，可又有谁能想到，克拉默法则还有推论呢。

1.12.1 第一个充分必要条件 47
1.12.2 第二个充分必要条件 48
1.12.3 第三个充分必要条件 49
1.12.4 第四个充分必要条件 49
1.12.5 真题分析 49

1.13 房间103——关于行列式的两种计算题 55

前面的“砖”中所讲的行列式的基本计算方法还不够应对考研中所涉及到的行列式的计算题。要想轻松应对考研中的行列式计算题的话，就要认真阅读本节。

1.13.1 抽象行列式的计算 55
1.13.2 具体行列式的计算 57

1.14 房间104——贯穿考研试题的思维定势 80

第1章的最后一个房间，在这个房间中，我要告诉大家一个好消息———一个万能公式。

1.15 小结 82

1.16 练习题 82

1.17 结尾语 88

第2章 第二层——矩阵 89

矩阵就是矩形啊，就是长方形。同学们，你们知道什么是长方形吗？如果你们知道的话，还有什么理由学不好矩阵呢？

2.1 第一车砖——矩阵的初等变换 90

任何一个矩阵，都可以进行初等变换。那么，矩阵的初等变换究竟是什么呢？请阅读本节的内容。

2.2 第二车砖——初等矩阵 91

单位矩阵只经过一次初等变换后形成的矩阵称为初等矩阵。

2.3 第三车砖——矩阵的秩 92

矩阵的秩是线性代数学科中的一个至关重要的知识点，一个承上启下的“桥梁”。

2.3.1 矩阵的子式的定义 92
2.3.2 矩阵的秩的定义 95
2.3.3 利用初等行变换来求矩阵的秩 95

2.4 房间 201——第一个大总结 104

这个大总结可以说是重要极了，它贯穿于整个线性代数学科。请大家一定要把这个大总结熟练地背下来。

2.5 房间 202——第二个大总结 105

本节内容完全可以由矩阵的运算推出来，但是本节的内容并不多余。如果大家能够熟练地将本节内容背下来，做题速度将会大大加快。

2.6 房间 203——矩阵乘法的两条算定律 110

矩阵乘法满足结合律，矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律。

2.6.1 矩阵乘法满足结合律 110
2.6.2 矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律 110

2.7 房间 204——可交换的矩阵相乘特例 110

注意，矩阵乘法不满足交换律。但是，在本节的五个式子中，矩阵相乘是可以交换的。

2.8 房间 205——关于矩阵转置的四个公式 111

之前给大家讲过矩阵的转置，本节将要给大家介绍关于矩阵的转置的四个公式。

2.9 房间 206——关于矩阵可逆的六个公式 111

大家对于可逆矩阵并不陌生吧？既然如此，那么本节所讲的关于矩阵可逆的六个公式对大家来说应该也是没有难度的。

2.10 房间 207——可逆矩阵、初等变换、初等矩阵、矩阵的秩之间的关系以及等价矩阵 118

可逆矩阵、初等变换、初等矩阵以及矩阵的秩都已经给大家讲过了，房间 207 则是把这几个知识点融会贯通，使得同学们对于这部分知识的掌握达到考研的要求。

2.10.1 可逆矩阵与初等矩阵的关系 ... 118
2.10.2 初等矩阵与初等变换的关系 ... 118
2.10.3 初等变换与矩阵的秩的关系 ... 121
2.10.4 初等矩阵的逆矩阵 123
2.10.5 等价矩阵 124

2.11 房间 208——分块矩阵以及一些知识点的深化 126

本节对一些常考题型的解题方法做了归纳总结，使得同学们可以更加轻松快捷的解题！

2.11.1 分块矩阵 126
2.11.2 反对称矩阵 127
2.11.3 求一个矩阵的逆矩阵 130
2.11.4 特殊分块矩阵的逆矩阵 134
2.11.5 求一个矩阵的若干次幂 138

2.12 小结 ······ 143

2.13 练习题 ······ 144

2.14 结尾语 ······ 153

第 3 章 第三层——向量 ······ 155

同学们，你们矩阵都能学得那么好，而从矩阵中抽出一行或一列就是向量。也就是说，向量也是矩阵，只不过是特殊的矩阵罢了，更简单了。你们有理由学不好吗？

3.1 第一车砖——向量与向量组的基本概念 ······ 156

我们可以把向量组看成是一个大箱子，里面装着可爱的“向量们”。

3.2 第二车砖——线性表出的概念 ······ 156

“线性表出”也叫“线性表示”，是反映一个向量与一个向量组之间关系的专有名词。

3.3 第三车砖——线性相关与线性无关的概念 ······ 157

本节内容如果大家能掌握好，本章的后续章节就都不用怕啦！

3.4 第四车砖——最大无关组 ······ 159

“最大无关组”也称“极大无关组”、“最大线性无关组”、“极大线性无关组”。

3.5 第五车砖——“向量组的秩”的概念 ······ 160

啊！又出现了一个带“秩”的词！大家快来看看它是啥玩意儿吧！

3.6 第六车砖——“向量组的秩”与“矩阵的秩”的关系 ······ 161

“向量组的秩”与“矩阵的秩”都带“秩”字，它们到底有没有关系？

3.7 第七车砖——线性表出的推广 ······ 162

百尺竿头，更进一步。让我们将“线性表出”推广开来吧！

3.8 第八车砖——等价向量组 ······ 163

什么？难道不光是两个矩阵能等价，向量组也能？

3.9 房间 301——关于线性相/无关要记的几个结论 165

理科有时也像文科，该记的就记，该背的就背！

3.10 房间 302——方程组的求解 166

本节我要给大家讲的解方程组的方法与“克拉默法则”有什么区别呢？

3.10.1 求齐次方程组的通解 168
3.10.2 求非齐次方程组的通解 178

3.11 房间 303——五个重要的定理 184

背下来！

3.11.1 定理 1 184
3.11.2 定理 2 185
3.11.3 定理 3 185
3.11.4 定理 4 192
3.11.5 定理 5 192
3.11.6 真题分析 193

3.12 房间 304——线性表出的本质 197

看到本质就一通百通啦！

3.13 房间 305——初等行变换前后相应的列向量组具有相同的线性相关性 198

本节是很有意思的一节，标题就是知识点，要搞明白哦。

3.14 房间 306——与秩有关的八个公式 203

八大公式要背下来，务必！考研题中常在此处做文章。

3.15 房间 307——向量空间 206

向量空间的不传之秘。

3.15.1 向量空间，基，维数，坐标 206
3.15.2 基变换公式 209
3.15.3 正交向量，正交矩阵，正交化 211

3.16 房间 308——线性相/无关的证明题 220

本节要总结一下线性相/无关的证明题的解题方法。只要大家认真阅读，考研题中关于线性相/无关的证明题基本可以像刘翔一样迅速跨过。

3.16.1 方法 1 220
3.16.2 方法 2 221

3.17 小结 225

3.18 练习题 226

3.19 结尾语 233

第 4 章 第四层——解线性方程组 235

小学就学过解方程组，现在只不过是未知数个数多了一点儿。什么？你不会？你一定是在开玩笑。

4.1 房间 401——求两个方程组的公共解 236

在第 3 章中，我们已经了解了如何求解齐次方程组和非齐次方程组。这一节我要告诉 大家的是如何求两个方程组的公共解。很简单，联立即可……

4.2 房间 402——同解方程组的证明 240

“同解方程组”与上一节所讨论的问题“两个方程组的公共解”有共同点也有不同点。

4.2.1 方法 1 241

4.2.2 方法 2 243

4.3 房间 403——已知齐次方程组的基础解系，反求齐次方程组 245

已知齐次方程组求基础解系这大家肯定是会了，如果反过来呢？已知齐次方程组的基础解系，该如何反求齐次方程组呢？

4.4 房间 404——线性方程组解的性质 247

你了解线性方程组解的性质吗？如果还是一头雾霾，看完霾就散了。

4.5 房间 405——通过讨论方程组中参数的取值，判断解的类型 252

方程组大家都会求解了吧？现在只不过是带参数的方程组而已，换汤不换药。

4.6 房间 406——已知方程组解的类型，求方程组中的参数 258

如果上一个房间的解题方法掌握好的话，那本房间的落成简直不费吹灰之力。

4.7 小结 261

4.8 练习题 262

4.9 结尾语 269

第 5 章　第五层——特征值、特征向量、相似矩阵 ······ 271

当大家看到车的标志，就可以分辨“奥迪”、“宝马”和“奔驰”。车标就相当于“特征值、特征向量”。相似三角形了解不？相似矩阵比相似三角形更简单。

5.1　第一车砖——特征值、特征向量的基本概念 ······ 272

特征值和特征向量一定要搞透，才能进行之后的计算。

5.2　第二车砖——特征值、特征向量的计算方法 ······ 272

一个方阵的特征值和特征向量可以通过某种计算方法计算出来吗？废话！

5.3　第三车砖——对称矩阵、正交矩阵的复习 ······ 277

本节纯属复习，但相当有必要，结合其他知识，可以“温故而知新”。

5.4　第四车砖——矩阵有多少个特征值为零 ······ 279

第二车砖中，我们搞清楚了求特征值的方法。本节要讨论一个矩阵有多少个特征值为 0。

5.5　第五车砖——相似矩阵 ······ 281

相似矩阵，顾名思义，真的很相似……

5.6　第六车砖——对角化 ······ 282

如果矩阵 A 可以相似于对角矩阵，则称矩阵 A 可以对角化。信老潘，就这么简单！

5.7　第七车砖——合同矩阵 ······ 282

合同矩阵与相似矩阵的定义式类似，所以请大家务必要区分清楚，记混是要犯错误的！

5.8　房间 501——如何证明两个矩阵有相同的特征值 ······ 283

四种方法，一节搞定。

5.9　房间 502——几个需要记住的结论 ······ 285

四条结论，务必背下。

5.9.1　结论 1 ······ 285
5.9.2　结论 2 ······ 286
5.9.3　结论 3 ······ 286
5.9.4　结论 4 ······ 287

5.10　房间 503——与特征向量有关的证明题通常会用到反证法 ······ 287

有时，从结论出发，一顺到头才叫爽！

5.11 房间 504——通过 A 的特征值、特征向量来推关于 A 的多项式的特征值、特征向量 289

推理是很有意思的，破案。

5.12 房间 505——什么样的方阵可以对角化 292

在本章的第六车砖中，我给大家介绍了对角化的概念。但是，并不是说任意的一个方阵 A，就一定可以对角化！

5.13 房间 506——若方阵可以对角化，那么 Λ 以及 P 怎么求 297

本节内容基于上一节内容，上一节弄明白了，本节就跟看小说一样。

5.14 房间 507——关于相似矩阵的五个小结论 305

五个小结论，无穷大用途！

5.15 房间 508——实对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交 306

任何一个矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必线性无关，而对于对称矩阵来说，它的两个来自于不同特征值的特征向量不但线性无关，而且正交。

5.16 房间 509——实对称矩阵一定可以相似于对角矩阵 308

在房间 505 中，我告诉了大家判断某矩阵是否可以对角化的两个步骤，而对于实对称矩阵来说，一定可以对角化，根本就不需要用那两个步骤去判断。

5.17 房间 510——实对称矩阵一定可以合同于对角矩阵 317

标题即结论，很重要。

5.18 小结 321

5.19 练习题 323

5.20 结尾语 332

第 6 章 第六层——二次型 333

二次型就是多项式，而且是二次多项式。高中时大家连三次和四次多项式都见过，那么二次多项式又怎么会有难度呢？

6.1 第一车砖——二次型的定义 334

二次型只不过是每项均由“常数×变量×变量”所组成的多项式（大家上初中时就学过多项式）而已，就这么简单。

6.2 第二车砖——二次型的对应矩阵 335

每个人都有一个梦想，每个二次型都有对应矩阵，而且可以互推，有点像函数表达式与函数图像的关系！

6.3 第三车砖——利用矩阵乘法来表示二次型 336

任何一个二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 都可以表示成 $\vec{X}^T A \vec{X}$（其中 $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，A 为二次型的对应矩阵）。

6.4 第四车砖——标准形 337

标准形是特殊的二次型，那么，它到底如何“标准”呢？

6.5 第五车砖——规范形 338

规范形是特殊的标准形。也就是说，它比“标准形”更“标准”！

6.6 第六车砖——化二次型为标准形 339

基本技能，不多少，看正文吧。

6.7 第七车砖——合同二次型 340

若两个二次型的对应矩阵是合同矩阵，那么称这两个二次型为合同二次型。

6.8 第八车砖——正定二次型、正定矩阵 341

正定二次型是特殊的二次型。特殊性体现在：当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零时，二次型恒大于零。零。

6.9 房间 601——用正交变换法化二次型为标准形 342

本节要与下一节结合来回看，了解两种方法的特点。

6.10 房间 602——用配方法化二次型为标准形 349

本节要与上一节结合来回看，了解两种方法的特点。

6.11 房间 603——两个对称矩阵合同的充分必要条件 355

在第 5 章的第七车砖中介绍了两个矩阵合同的定义。可是实际上，我们很难通过定义来判断两个矩阵是否合同。于是我们迫切需要一个充分必要条件！

6.12 房间 604——正定二次型、正定矩阵的证明方法 357

大家不要害怕证明题，其实很多时候，证明题甚至比计算题更简单！

6.12.1 正定矩阵的证明方法 357

6.12.2 正定二次型的证明方法 362

6.13 小结 364

6.14 练习题 365

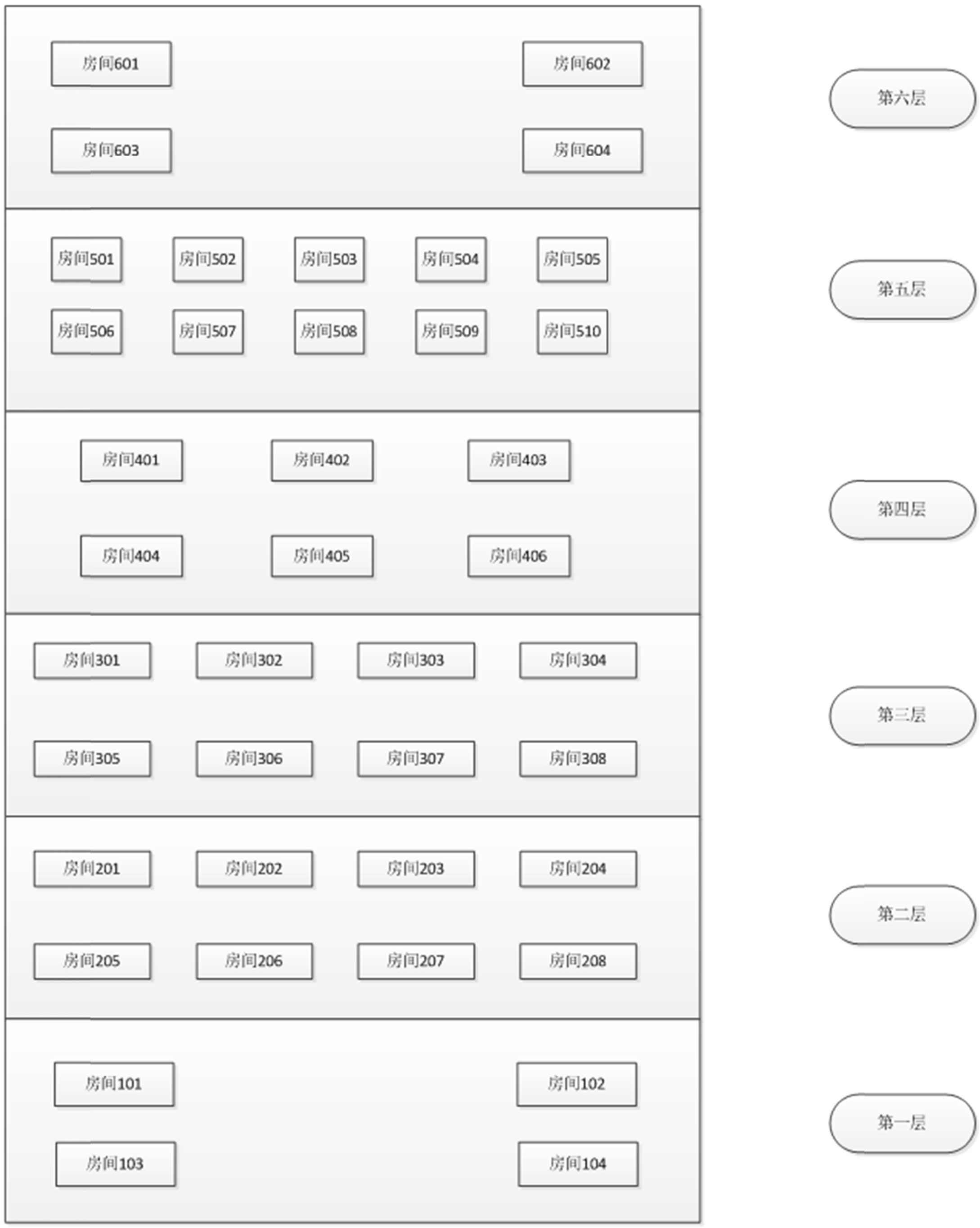
6.15 结尾语 372



超级导读　线性代数大厦建造史（必看）

致正在准备研究生入学考试的同学们的话：本书共七章，此章虽不讲具体的知识点，但其地位是相当重要的。因此，强烈建议大家，一定要阅读本章的内容。

1　考研数学线性代数就是一座大楼



这座大楼共六层。第一层有四个房间，第二层有八个房间，第三层有八个房间，第四层有六个房间，第五层有十个房间，第六层有四个房间。你是一名工人，房地产开发商要求你在一片空地上盖这么一座大楼，并且你和开发商签了合同，合同中规定了停工日期。只要到了停工日期，无论你盖完没盖完，你都不能再盖了，必须接受开发商的检查。开发商比较懒，他并不真正来工地一个一个门牌号的依次检查，而是把你叫到办公室，然后问你关于其中几个房间的构造是什么样的。比如，你到了他办公室后，他可能会问三个问题（当然有可能问更多的问题）。

- 你介绍一下房间 207 和房间 103 的构造。
- 你介绍一下房间 304 的构造。
- 你介绍一下房间 508 和房间 602 的构造。

……

这三个问题如果你都答得让他满意，他会认为你已经把大楼完全盖好了，于是他会给你三十万元作为奖励；如果你有一个问题没有答出来，只答出了两个问题，他会给你二十万元；如果你只答出了一个问题，他就只给你十万元；如果你一个问题都没答出，他会非常生气，认为你根本没盖，一分钱也不给你。

以上这段话我想说的是什么呢，请继续往下看。

大楼：	考研数学线性代数这个学科；
大楼的每层：	指考研线性代数这个学科的每一章；
每层的房间数量：	每一章的考点数量；
房地产开发商：	考研数学线性代数部分的命题人；
工人：	你自己；
停工日期：	考试的日期；
开发商的办公室：	考研考场；
开发商问你的问题：	考研数学线性代数部分的题目；
开发商给你的钱：	考研数学线性代数部分的得分。

有了这些对应关系后，我把前面的一大段话换一种方式叙述一遍。

考研数学线性代数部分的知识可以分为 6 章。第 1 章有 4 个考点，第 2 章有八个考点，

第 3 章有 8 考点，第 4 章有 6 个考点，第 5 章有 10 个考点，第 6 章有 4 个考点。考研命题人规定了考研的日期，日期一到，不管你有没有复习完，都要去考场参加考试。在考试中，你也许会在卷子上遇到三道（当然，有可能更多）线性代数的题，比如：

第 1 题：考到的是第 2 章的考点 7 和第 1 章的考点 3。

第 2 题：考到的是第 3 章的考点 4。

第 3 题：考到是第 5 章的考点 8 和第 6 章的考点 2。

这三个问题你如果都答对了，你就得满分，否则你将会被扣掉相应的分。

2　帮你盖楼

亲爱的同学，相信你看完上一节后，已经对你即将要盖的这座考研数学线性代数大厦有了最初步的认识。而我，是一个小有名气的建筑师，我将和你一起盖好这座六层的大楼。无论如何，请相信我一句话：不管你的建筑功底如何，哪怕你是学音乐美术的，对建筑一窍不通，只要你愿意接受我的帮助，我可以保证你把这座六层的大楼盖的金碧辉煌，我更可以保证你在面对开发商的询问时，对答如流。

也许我上面的话太啰嗦。好，那我说直白点：**任何人，记住是任何人，只要具有初中（连高中都不用）的数学基础，只要你认真看完此书，那么，考研数学线性代数部分得满分是十分容易的。**

3　第 1 章到第 6 章的内容

第 1 章：第一层——**行列式**（其中有 4 个房间）；

第 2 章：第二层——**矩阵**（其中有 8 个房间）；

第 3 章：第三层——**向量**（其中有 8 个房间）；

第 4 章：第四层——**解线性方程组**（其中有 6 个房间）；

第 5 章：第五层——**特征值、特征向量、相似矩阵**（其中有 10 个房间）；

第 6 章：第六层——**二次型**（其中有 4 个房间）。

以上只是第 1 章到第 6 章的标题，下面我要告诉大家的是每一章展开后的样子。

我就以第 1 章为例，说一下展开后的第 1 章是什么样子的，其他各章的表达形式是一样的。

第 1 章　第一层——行列式
第一车砖:　................
第二车砖：................
房间 101：................
房间 102：................
房间 103：................
房间 104：................

看到这里，我相信你会觉得很奇怪，因为根据我之前说的，你们通常会觉得第 1 章的样子应该如下图：

第 1 章　第一层——行列式
房间 101：................
房间 102：................
房间 103：................
房间 104：................

可实际上，为什么除了房间以外，又多了“砖”呢？听我解释：没有砖能盖楼吗？不能吧，因为巧妇难为无米之炊，砖是盖楼的基础。

那么这个“砖”，在线性代数大楼中又相当于什么呢？我以高考数学举例。

高考数学考试大纲中一定会写：要考排列组合、要考等差数列、要考立体几何等，却绝对不会写：要考加减乘除四则运算、要考正负数、要考绝对值等。为什么不写考这些？因为这些是基础，是“砖”，会这些东西是必须的，是最基本的要求，所以高考考试大纲里就不必提了。尽管没提，但是你能不会吗？显然不能不会。在线性代数中也是一样，虽然考研卷子上只考“房间”，但是如果没有“砖”，你怎么可能搭建一个个的房间呢？明白了吧。

所以接下来每一章的内容都是由“砖”和“房间”两部分所组成的。

4　满分要这样才行

想要考研数学线性代数部分全对，这是每位考生的心愿。要想达成这个心愿，你需要做到以下两点：

（1）书中的每一个知识点都要看。我想强调的是：本书不存在任何看不懂的可能性，因为我采用的表达方式非常通俗。因此，别落下任何一个知识点。

（2）在你看完每一章后，你需要把每一章的“房间”背下来（“砖”不用刻意去背，只要会了就行了，因为“砖”是最基本的。正如同参加高考的考生要背高考考试大纲中的考点，而不用去背最基本的加减乘除四则运算法则）。不是看懂就行，一定要背下来，这一点至关重要。我举个例子，比如当你看完第 1 章之后你需要对自己说：这一章共有 4 个房间，每个房间的内容是什么。如果忘了，就查书，直到背下来为止。相信我，这一招可以收到奇效。当然，如果能够默写下来的话，那就更好了。比如，当你看完第 1 章后，你最好的方式就是拿一张白纸，白纸上这么写：

大楼第一层：

房间 101：　……………

房间 102：　……………

房间 103：　……………

房间 104：　……………

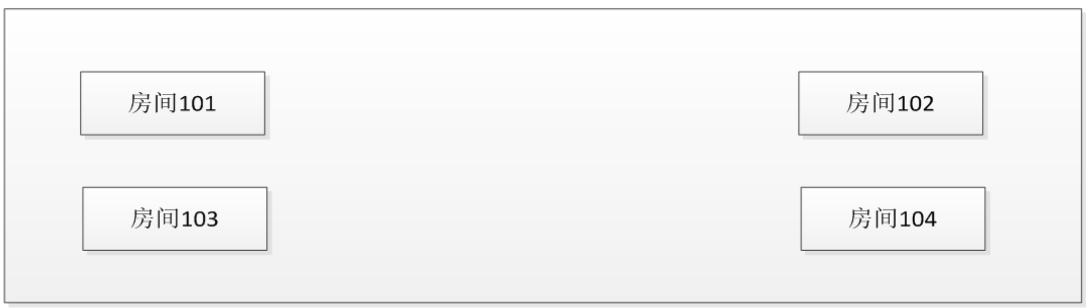
你只要能默写出来，那么这第一层就可以算是盖好了。每层都这样，考研数学线性代数部分一定是可以得满分的。

5　给大家的话

有志者，事竟成。破釜沉舟，百二秦关终属楚；

苦心人，天不负。卧薪尝胆，三千越甲可吞吴。

第 1 章　第一层——行列式



由于我不确定你是否看了“超级导读”，所以再次提醒：每章我将按照“砖+房间”的方法来讲解，其中“砖”只要全看懂（因为砖是最基础的内容）就可以了，而“房间”则要看懂后默写出来（因为房间是考研的考点）。只要你每章都如此，那么，不管你是什么基础的同学，考研数学线性代数部分就一定能拿到满分。

1.1 第一车砖——行列式长什么样

行列式有两个标志，必须**同时满足**这两个标志，才是行列式。

第一个标志：双竖线。注意，千万不能写成“（）”或者“[]”。

例. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$和$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$都不是行列式。

第二个标志：行数=列数。换句话说就是：有几行就有几列，行数和列数绝对不可以不相等。

例.$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$不是行列式，因为行数$\neq$列数。（有三行两列，$3 \neq 2$）。

以上介绍了行列式的两个标志，即“双竖线”和“行数=列数”。值得注意的是：这两条必须同时满足，才是行列式，只满足其中一条是不行的。让我们再来看以下几个例子。

例. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第一个标志。

例. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$不是行列式，因为它既不满足行列式的第一个标志，也不满足行列式的第二个标志。

例. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第二个标志。

例. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$是行列式，因为它同时满足行列式的第一个标志和第二个标志。

例. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第一个标志。

好了，通过“第一车砖”，相信大家对行列式已经有了初步的认识，至少知道行列式长什么样了。下面我们来看“第二车砖”。

1.2　第二车砖——行列式的本质

行列式本质是一个数。注意：在这句话中，我想强调的是“一个”。

例. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$这两个都是行列式。第一个行列式在双竖线内有四个数，第二个行列式在双竖线内有九个数，但它们的本质都只是“一个”数。

明白了吧，这就是“第二车砖”想要告诉大家的。至于上例中的那两个行列式所表示的那个数到底是什么，我们在接下来的“第三车砖”中讲解。此刻你只需要了解：行列式本质是一个数。

1.3　第三车砖——行列式的基本计算方法

在第二车砖中，我们已经知道，行列式的本质是一个数，那么这个数是多少呢？

- 行列式的基本方法
  - 特殊行列式的计算
    - 上三角行列式的计算
    - 下三角行列式的计算
    - 对角行列式的计算
    - 反对角行列式的计算
  - 一般行列式的计算
    - 两行两列行列式的计算
    - 三行三列行列式的计算
    - 大于三行三列行列式的计算

1.3.1　特殊行列式的计算

1.上三角行列式的计算

先来给大家介绍一下对角线的概念。用最通俗易懂的话来说，对角线是指：行列式中从左上到右下的那条斜线。

例. $\begin{vmatrix}1&4&9\\0&2&4\\0&8&2\end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix}1&5&9&13\\2&6&10&14\\3&7&11&15\\4&8&12&16\end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix}5&2\\8&7\end{vmatrix}$

在以上三个行列式中，对角线分别为“$\begin{matrix}1&&\\&2&\\&&2\end{matrix}$”、“$\begin{matrix}1&&&\\&6&&\\&&11&\\&&&16\end{matrix}$”、“$\begin{matrix}5&\\&7\end{matrix}$”。

注意：对角线是指行列式中从左上到右下的斜线，千万别记成从右上到左下的斜线。

再来看一下什么叫“上三角行列式”。**上三角行列式指：对角线下侧的所有数都为 0 的行列式。**

例. $\begin{vmatrix}1&4&9\\0&2&4\\0&0&0\end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix}1&5&9&13\\0&6&10&14\\0&0&11&15\\0&0&0&16\end{vmatrix}$、$\begin{vmatrix}5&2\\0&7\end{vmatrix}$都是上三角行列式。

现在知道什么是上三角行列式了吧。需要注意的是：**在判断一个行列式是否为上三角行列式时，只需要关注对角线下侧，只要对角线下侧的所有数都为 0 的行列式就是上三角行列式，至于对角线本身的数以及对角线上侧的数中有没有 0 这都无所谓，明白了吧。**

例. $\begin{vmatrix}0&4&5\\0&0&0\\0&0&3\end{vmatrix}$和$\begin{vmatrix}0&0&0\\0&2&4\\0&0&1\end{vmatrix}$都是上三角行列式。

那么，上三角行列式的计算方法是什么呢？很简单。**上三角行列式的计算方法是：直接将对角线上的数相乘即可。**

例. $\begin{vmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{vmatrix}=1\times2\times3=6$，$\begin{vmatrix}1&5&9&13\\0&2&10&14\\0&0&3&15\\0&0&0&4\end{vmatrix}=1\times2\times3\times4=24$，$\begin{vmatrix}1&2\\0&4\end{vmatrix}=1\times4=4$

2.下三角行列式的计算

下三角行列式指：对角线上侧的所有数都为 0 的行列式。

下三角行列式的计算方法是：直接将对角线上的数相乘即可（和上三角行列式的计算方法完全一样）。

例. $\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\2&4&3\end{vmatrix}=1\times2\times3=6$，$\begin{vmatrix}1&0\\4&2\end{vmatrix}=1\times2=2$，$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\3&0&5&0\\9&7&4&2\end{vmatrix}=1\times2\times5\times2=20$

3.对角行列式的计算

对角行列式指：除了对角线上的数以外的所有数都为 0 的行列式。换言之，对角行列式是上角行列式和下三角行列式的结合。注意：对角线本身的数中有没有 0 无所谓，只要除对角线以外的所有数都为 0 的行列式就是对角行列式。

对角行列式的计算方法：直接将对角线上的数相乘即可（和上三角行列式的计算方法、下三角行列式的计算方法完全一样）。

例. $\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}=1\times0=0$，$\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{vmatrix}=1\times1\times2=2$，$\begin{vmatrix}3&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&6\end{vmatrix}=3\times4\times5\times6=360$

再次提醒注意：

- 在判断某行列式是否为上三角行列式时，只需判断对角线下侧的数是否全为 0 即可，至于对角线本身的数及对角线上侧的数中有没有 0 则根本不需要关注。
- 在判断某行列式是否为下三角行列式时，只需判断对角线上侧的数是否全为 0 即可，至于对角线本身的数及对角线下侧的数中有没有 0 则根本不需要关注。
- 在判断某行列式是否为对角行列式时，只需判断对角线上侧及下侧是否全为 0 即可，至于对角线本身的数中有没有 0 则根本不需要关注。

只要某行列式是上三角行列式、下三角行列式或对角行列式，那么计算该行列式的方法就是：直接把对角线上的数相乘。

4. 反对角行列式的计算

先来介绍"反对角线"的概念。**反对角线指：行列式中从右上到左下的斜线。**

例. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$，在左侧的两个行列式中"$\begin{matrix} & 2 \\ 3 & \end{matrix}$"和"$\begin{matrix} & & 3 \\ & 5 & \\ 7 & & \end{matrix}$"分别为各自的反对角线。

知道了反对角线的意思后，同学们不禁要问，反对角行列式指的是什么样的行列式呢?别急，现在我就来告诉大家。**反对角行列式指：除了反对角线上的数以外的所有数都为 0 的行列式（反对角线上的数中有没有 0 不需要关注）。**

例. $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$都是反对角行列式。

反对角行列式的计算方法：设反对角行列式为$\begin{vmatrix} O & & \lambda_1 \\ & \lambda_2 & \\ \iddots & & \\ \lambda_n & & O \end{vmatrix}$，则该反对角行列式的值为：$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，其中 n 为该反对角行列式的行数（或列数）。

例. 计算$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解：此行列式为反对角行列式。所以，如果想计算此行列式的值，需要套用刚刚讲过的公式$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$。由于这是四阶（四行四列）的行列式，所以$n=4$。又因为在此题中，$\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5,\ \lambda_4=9$，所以此行列式的值为：$(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}\times1\times2\times5\times9=90$

1.3.2　一般行列式的计算

1.两行两列行列式的计算

两行两列的行列式又被称为二阶行列式，可以直接利用公式来计算，公式为：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

例. 计算$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - 4 \times 8 = -22$

例. 计算$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = 7 \times 2 - 0 \times 9 = 14$

很简单，对吧！

2.三行三列行列式的计算

三行三列的行列式又被称为三阶行列式，与二阶行列式类似，可以直接利用公式来计算，公式为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

这公式并不难记，记忆方法如下：等式右侧共有六项，前三项为正，后三项为负，因此你大体上要这么记：

$$\square + \square + \square - \Delta - \Delta - \Delta$$

那么，三个$\square$中的每一个$\square$该如何去记呢？很简单：第一个$\square$为对角线上的三个数

相乘。对角线是“$\begin{matrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{matrix}$”，所以第一个□为$aei$。那么第二个□和第三个□该如何去记呢？也很简单。首先，从行列式中去掉对角线，也就是说，从行列式中去掉“$\begin{matrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{matrix}$”，则行列式变为$\begin{vmatrix} & b & c \\ d & & f \\ g & h & \end{vmatrix}$，只剩六个数了。然后从这六个数中找出三个不同行也不同列的数相乘就是第二个□，剩下的三个数相乘就是第三个□。

那么，三个Δ中的每一个Δ又该如何去记呢？第一个Δ为反对角线上的数字相乘。反对角线是“$\begin{matrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{matrix}$”，所以第一个Δ为$ceg$。至于第二个Δ和第三个Δ的记忆方法嘛，也很简单。首先，从行列式中去掉反对角线，也就是说，从行列式中去掉“$\begin{matrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{matrix}$”，则行列式变为$\begin{vmatrix} a & b & \\ d & & f \\ & h & i \end{vmatrix}$，只剩下六个数。然后从这六个数中找出三个不同行也不同列的数相乘就是第二个Δ，剩下的三个数相乘就是第三个Δ。

会了吧，你们自己试试默写此公式：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

默写完公式后，再看看下面的例题：

例. $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= 1\times2\times3+2\times5\times4+4\times3\times2-4\times2\times4-1\times5\times2-2\times3\times3 \\ &= 6+40+24-32-10-18 \\ &= 10 \end{aligned}$$

3.大于三行三列的行列式计算

通过前面的介绍，我们已经知道了二阶行列式和三阶行列式可以通过公式来计算。那么，如果是四阶（四行四列）的行列式该怎么计算呢？如果是五阶（五行五列）的行列式又该怎么计算呢？你一定又想让我告诉你相应的公式。但我现在只能很遗憾的告诉你：**大于三阶的行列式就没有计算公式了。但是不要失望！虽然没有公式，但是是有办法计算的！**我们一起开动脑筋想想，大于三阶的行列式虽然没有计算公式，但是二阶行列式和三阶行列式是有计算公式的呀！如果我们可以将四阶行列式、五阶行列式化为二阶的行列式或三阶的行列式，那不就可以套公式了嘛。事实就是如此。

下面介绍**大于三行三列的行列式的计算方法：降阶法（也叫按行列展开法）。**

降阶法有两个步骤：

（1）从行列式中任意选择一行或一列；

（2）设刚刚我们选择的那一行的数从左往右依次为 $a_1,a_2,\dots,a_n$（如果选择的是列的话，就设刚刚选择的那一列的数从上往下依次为 $a_1,a_2,\dots,a_n$），然后设 x_i 为 a_i 的行标（比如 a_1 处于行列式中的第三行，那么 x_1 就是 3），设 y_i 为 a_i 的列标（比如 a_1 处于行列式中的第二列，那么 y_1 就是 2）。最后，再设 $|A_i|$ 为原行列式中去掉 a_i 的所在行和所在列后剩下的数所组成的行列式。好，现在开始说你们最想知道的结论，行列式的值

$$=a_1\times(-1)^{x_1+y_1}\times|A_1|+a_2\times(-1)^{x_2+y_2}\times|A_2|+\cdots+a_n\times(-1)^{x_n+y_n}\times|A_n|$$。

以上就是降阶法（也叫按行列展开法）的两个步骤。同学们，由于步骤 2 里设的东西很多，所以你们可能会觉得这个方法很难。如果你们真这么认为的话，那我可以非常负责任的告诉你们：大错特错了！降阶法其实非常简单。只不过如此简单的方法如果要用规范化的语言描述起来还真是比较麻烦，所以我在步骤 2 里才设这么多，明白了吧。现在看看下面的这道例题，看完就会恍然大悟的：哦！原来此方法如此简单啊。

例. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&-2\\1&1&3\\-2&3&1\end{vmatrix}$

解：我在前面已经提到过了，降阶法是用于计算大于三阶的行列式的方法，而这道题是三阶行列式啊，三阶行列式应该用公式法来计算啊。肯定有很多同学会这么想。**那我现在告诉大家：三阶行列式既能用公式法计算，也能用降阶法计算，但是大于三阶的行列式只能用降阶法计算（除非是特殊的行列式）**。明白了吧！由于现在我要举例来说明降阶法的使用，所以这道例题我就用降阶法来计算。

我们严格按照上述两个步骤来做。

（1）从行列式中任意选择一行或一列。此时有六种选法：可以选择第一行 $1\quad 0\quad -2$；

可以选择第二行$1\quad 1\quad 3$；可以选择第三行$-2\quad 3\quad 1$；可以选择第一列$1\quad 1\quad -2$；可以选择第二列$0\quad 1\quad 3$；可以选择第三列$-2\quad 3\quad 1$。从这六种选法中任意选择一种都可以，因为无论选的是那种，最后的答案都是一样的。比如我们就选择第一行，即$1\quad 0\quad -2$。

$$
\begin{aligned}
D &= 1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{vmatrix}+(-2)\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{vmatrix}\\
&= -8+0-10\\
&= -18
\end{aligned}
\quad (2)
$$

为什么会这样呢？听我来讲。因为“-1”是公式，这个记住就行了，然后由于 1 处于第一行第一列，所以是 1+1。由于 0 处于第一行第二列，所以是 1+2。由于-2 处于第一行第三列，所以是 1+3。然后：$\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{vmatrix}$分别为行列式去掉 1，0，-2 的所在行和所在列后剩下的行列式。请看下面的详细解释：

$\begin{vmatrix}\boxed{1} & 0 & -2\\1 & 1 & 3\\-2 & 3 & 1\end{vmatrix}$去掉$\boxed{1}$所在的行和列，即去掉第一行和第一列，剩下的数所组成的行列式为$\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{vmatrix}$。

$\begin{vmatrix}1 & \boxed{0} & -2\\1 & 1 & 3\\-2 & 3 & 1\end{vmatrix}$去掉$\boxed{0}$所在的行和列，即去掉第一行和第二列，剩下的数所组成的行列式为$\begin{vmatrix}1 & 3\\-2 & 1\end{vmatrix}$。

$\begin{vmatrix}1 & 0 & \boxed{-2}\\1 & 1 & 3\\-2 & 3 & 1\end{vmatrix}$去掉$\boxed{-2}$所在的行和列，即去掉第一行和第三列，剩下的数所组成的行列式为$\begin{vmatrix}1 & 1\\-2 & 3\end{vmatrix}$。

这道题就做完了，最后的答案是－18。

刚才我提到，倘若在步骤 1，我们选择的不是第一行而是第二行、第三行、第一列、第二列、第三列，那么最后的答案也是一样的，我们不妨试试。如果选择的是第二行 1　1　3，

则
$$\begin{aligned}D &= 1\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}0 & -2\\3 & 1\end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix}1 & -2\\-2 & 1\end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}1 & 0\\-2 & 3\end{vmatrix}\\&=-6-3-9\\&=-18\end{aligned}$$

看见了吧，用两种不同的选法来做，结果是一样的。同样还可以选择第三行、第一列、第二列、第三列来做，结果也一样是−18。请注意：这道题是采用降阶法来做的，把三阶的行列式降成了三个二阶的行列式，然后用二阶的行列式的公式去做。我前面提到，此题可以直接用公式法，因为三阶的行列式本来就有公式。但是如果要计算四阶或四阶以上的行列式，就必须用降阶法了（计算四阶的行列式要将其化为四个三阶行列式相加的形式，然后用三阶行列式的公式去计算。当然了，如果你认为三阶行列式的公式麻烦，你完全可以再将每个三阶行列式降为三个二阶行列式，然后用二阶行列式的公式去计算）。

至此，“第三车砖”已经讲完，最后给两点温馨提示。

温馨提示 1：在进行降阶法的步骤 1（从行列式中任意选择一行或一列）时，**要尽量选取有 0 的行或列**，因为 0 的那一项肯定是 0，不用乘了，为步骤 2 省事了。

温馨提示 2：特殊行列式完全可以用一般行列式的计算方法来计算。如 $\begin{vmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{vmatrix}$ 是特殊行列式中的下三角的行列式，直接把对角线上的数字相乘即可：$\begin{vmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{vmatrix}=1\times3=3$。而如果我们把它看成是一般行列式中的两行两列行列式，则 $\begin{vmatrix}1 & 0\\4 & 3\end{vmatrix}=1\times3-4\times0=3$，答案是一样的。

1.4　第四车砖——行列式的五条性质

“第三车砖”已经足够计算一个行列式的了。然而，为了计算的方便与快捷，以下这五条行列式的性质也请大家务必掌握。（再次说明：这不属于行列式的基本计算方法，只是性质，通过这些性质可以更快捷的计算一个行列式，请务必掌握）。

1.4.1 性质 1

一个行列式的转置等于它本身。

先来说一下什么叫转置。把一个 n 行 n 列的行列式，第一行变成第一列，第二行变成第二列，……，第 n 行变为第 n 列后所得到的新行列式称为原行列式的转置。假设原行列式记为 D，则它的转置记作 D^T。

例. $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，求 D 的转置 D^T。

解：把它的第一行 $1\quad 2\quad 3$ 变为第一列：$\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$

把它的第二行 $4\quad 5\quad 6$ 变为第二列：$\begin{matrix}4\\5\\6\end{matrix}$

把它的第三行 $7\quad 8\quad 9$ 变为第三列：$\begin{matrix}7\\8\\9\end{matrix}$

得到转置矩阵：$D^T=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$。

以上只是告诉了大家什么是转置，现在来说一下性质 1。性质 1（一个行列式的转置等于它本身）的意思就是 $D^T=D$，明白了吧。

例. $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$，如果不信，可以分别计算这两个行列式，会发现它们的值是一样的。

1.4.2　性质 2

互换两行,行列式变号。

例. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

性质 2 有一个推论：如果某行列式有两行相同，那就不用费精力去计算了，这个行列式的值一定为 0，这个推论是怎么推出来的呢？下面我就来说一下性质 2 的这个推论的推导过程：

如 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix}$，根据性质 2，将第一行与第三行进行互换，行列式变号，即

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix}$。那你想想，谁的相反数等于它本身，只有 0。

性质 2 讲完了，练一道题。

例.计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解：由于其中有两行相同，所以：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

1.4.3　性质 3

如果行列式的某一行的数含有公因子，那么可将此公因子提到行列式之外。

例.计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解：其中第二行2　4　6含有公因子“2”，可以将这个“2”提到行列式之外，因此

$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\8&7&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\8&7&2\end{vmatrix}$。根据性质2的推论可以知道，$\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\8&7&2\end{vmatrix}=0$。所以$2\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\8&7&2\end{vmatrix}=0$，

所以$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\8&7&2\end{vmatrix}=0$。

再来看一个例子。

例.计算$\begin{vmatrix}2&4&6\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{3}{7}\\1&7&5\end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix}2&4&6\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{3}{7}\\1&7&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&\frac{3}{7}\\1&7&5\end{vmatrix}=\frac{2}{7}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&7&5\end{vmatrix}=\frac{2}{7}\times 0=0$

这样会用性质3了吧，下面我说一点要注意的：既然行列式中某行的公因子可以提到行列式外面，那么行列式外面的数自然也可以乘到行列式中，并且可以乘到任何一行。

例.$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\6&8&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2\times3&2\times4&2\times5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\3&4&5\end{vmatrix}=\begin{cases}\begin{vmatrix}2&4&6\\4&5&6\\3&4&5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2&3\\8&10&12\\3&4&5\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\6&8&10\end{vmatrix}\end{cases}$$

看见了吧，上例中行列式外面的“2”是从原行列式的第三行提出到行列式外面的，但是再乘到行列式中时，可以乘在任意一行。

与性质2一样，**性质3也有一个推论：如果行列式有两行对应成比例，那么此行列式就不用费精力去计算了，这个行列式的值一定为0。**证明过程如下：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ d & e & f \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = k \times 0 = 0$$

明白了吧，现在来看一道例题。

例.计算$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix}$

解：由于第一行和第三列对应成比例（第三行是第一行的 3 倍），所以：$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 9 & 2 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix} = 0$。

性质 3 讲完了。要注意：性质 2 的推论、性质 3 的推论的结论都是行列式的值为 0。只不过一个说的是若行列式有两行相同，则值为 0；一个说的是若行列式有两行对应成比例，则值为 0。

1.4.4　性质 4

行列式的某一行中的每个数都可以写成两个数相加的形式，因此一个行列式可以化为两个行列式相加的形式。

例.$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

看见了吧，第一行和第三行都不变，把第二行拆为：$1+1$，$2+1$，$3+1$。其实有无数种拆法，如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

看见了吧，可以拆任意一行，而每一行又有无数种拆法。

比如要拆第二行，那么：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

只需满足 $a+d=2$， $b+e=3$， $c+f=4$ 即可。

再比如要拆第三行，那么：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

只需满足 $a+d=5$， $b+e=6$， $c+f=7$ 即可。

1.4.5 性质 5

把行列式的某一行乘以 k（k 为任意常数）后，加到另外一行，行列式的值不变。

此性质是行列式的五条性质中最常用的一条性质。请看下面的例题。

例. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

现在将第一行乘以 -1（可以乘以任何数，我乘以 -1 只是举一个例子。）

$1 \times (-1) = -1$
$2 \times (-1) = -2$
$3 \times (-1) = -3$

然后将 $-1 \quad -2 \quad -3$ 加到第二行：

$4 + (-1) = 3$
$5 + (-2) = 3$
$6 + (-3) = 3$

此时第二行由 $4 \quad 5 \quad 6$ 变为了 $3 \quad 3 \quad 3$。

则必有 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$。

行列式的五条性质讲完了，最后说一句：以上的五条**“行”**的性质完全可以应用到**“列”**上。

1.5　第五车砖——克拉默法则

一个新的名词出现了。但是大家不要被它的名字吓倒，因为这实际上是一个非常容易的解题法则。

在正式介绍克拉默法则之前，我们首先应当了解的是：这个法则是干什么用的？换句话说就是：什么时候可以用到这个法则，那么现在我要告诉大家：

克拉默法则是解方程组用的

所以大家千万别把克拉默法则当成是行列式的一种计算方法。行列式的计算方法在前面的“第三车砖”中已经讲过了。一定要记住：克拉默法则是解方程组用的。只有解方程组的题目时才能用克拉默法则，只是应用此法则时要用到一些行列式的知识而已。

那么，是解任何方程组都可以用克拉默法则吗？不是。克拉默法则只能用于解**特定**的方程组。那么，到底什么样的方程组可以用克拉默法则求解呢？下面我就来告诉大家。

对于一个给定的方程组，按如下步骤判断该方程组是否可以用克拉默法则进行求解：

（1）关注所给方程组中每一个方程的形式。具体来说就是：当所给方程组中每一个方程的形式都是：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$为任意常数）时，进行第（2）步；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。

（2）关注所给方程组包含的方程个数与未知数个数。具体来说就是：当所给方程组包含的方程个数等于未知数个数时，进行第（3）步；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。

（3）关注所给方程组对应的系数行列式D。具体来说就是：当系数行列式$D\neq 0$时，此方程组可以用克拉默法则进行求解；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。

可能有的同学没有看懂以上的三个步骤，不用担心，请看下面的例题。

例.判断如下方程组是否可以用克拉默法则来求解。

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1^2-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$$

解：我们先来进行第（1）步。

首先，此方程组所包含的第一个方程（$2x_1+x_2-5x_3+x_4=8$）的形式是$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中$a_1=2$、$a_2=1$、$a_3=-5$、$a_4=1$、$b=8$）；

然后，此方程组所包含的第二个方程（$x_1^2-3x_2-6x_4=9$）中出现了“x_1^2”，因此该方程的形式不是$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$；

接着，此方程组所包含的第三个方程（$2x_2-x_3+2x_4=-5$）的形式是$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中$a_1=0$、$a_2=2$、$a_3=-1$、$a_4=2$、$b=-5$）；

最后，此方程组所包含的第四个方程（$x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0$）的形式是$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中$a_1=1$、$a_2=4$、$a_3=-7$、$a_4=6$、$b=0$）。

综上所述，此方程组所包含的四个方程的形式并非都是 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ （刚才我已经说了，此方程组所包含的第二个方程的形式不是 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ ）。**所以我们根本不用再进行第（2）步和第（3）步了，现在就可以断定此方程组不可以用克拉默法则来求解。**

例.判断如下方程组是否可以用克拉默法则来求解。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

解：我们先来进行第（1）步。

首先，此方程组所包含的第一个方程（ $2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8$ ）的形式是 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ （其中 $a_1 = 2$、$a_2 = 1$、$a_3 = -5$、$a_4 = 1$、$b = 8$ ）；

然后，此方程组所包含的第二个方程（ $x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9$ ）的形式是 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ （其中 $a_1 = 1$、$a_2 = -3$、$a_3 = 0$、$a_4 = -6$、$b = 9$ ）；

接着，此方程组所包含的第三个方程（ $2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5$ ）的形式是 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ （其中 $a_1 = 0$、$a_2 = 2$、$a_3 = -1$、$a_4 = 2$、$b = -5$ ）；

综上所述，此方程组所包含的三个方程的形式**都是** $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 。

因此现在我们需要进行第（2）步。

此方程组含三个方程，含四个未知数，$3 \neq 4$。**所以我们根本不用再进行第（3）步了，现在就可以断定此方程组不可以用克拉默法则来求解。**

例.判断如下方程组是否可以用克拉默法则来求解。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解：我们先来进行第（1）步。

首先，此方程组所包含的第一个方程（ $2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8$ ）的形式是 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ （其中 $a_1 = 2$、$a_2 = 1$、$a_3 = -5$、$a_4 = 1$、$b = 8$ ）；

接着，此方程组所包含的第二个方程（$x_1-3x_2-6x_4=9$）的形式**也是** $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中 $a_1=1$、$a_2=-3$、$a_3=0$、$a_4=-6$、$b=9$）；

然后，此方程组所包含的第三个方程（$2x_2-x_3+2x_4=-5$）的形式**还是** $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中 $a_1=0$、$a_2=2$、$a_3=-1$、$a_4=2$、$b=-5$）；

最后，此方程组所包含的第四个方程（$x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0$）的形式**仍然是** $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中 $a_1=1$、$a_2=4$、$a_3=-7$、$a_4=6$、$b=0$）。

综上所述，此方程组所包含的四个方程的形式**都是** $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$。

因此现在我们需要进行第（2）步。

此方程组含四个方程，也含四个未知数，$4=4$。

因此现在我们需要进行第（3）步。

关注此方程组对应的系数行列式 D，看 D 到底是不是 0。那么我们首先需要做的就是把系数行列式 D 写出来，对吧。

好，我现在教大家怎么写系数行列式。所谓系数行列式，指的就是把方程组中的每个方程的等式左侧的所有未知数的系数写在一起所组成的行列式（与等式右侧的常数无关）。

第一个方程：$2x_1+x_2-5x_3+x_4=8$

系数为：2　1　-5　1

第二个方程：$x_1-3x_2-6x_4=9$

系数为：1　-3　0　-6（其中没有 x_3 这一项，所以 x_3 的系数当然就是 0）

第三个方程：$2x_2-x_3+2x_4=-5$

系数为：0　2　-1　2（其中没有 x_1 这一项，所以 x_1 的系数当然就是 0）

第四个方程：$x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0$

系数为：1　4　-7　6

因此，所有未知数的系数所组成的行列式为：

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\1 & -3 & 0 & -6\\0 & 2 & -1 & 2\\1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}$$

利用“第三车砖”中所讲的方法，计算得出：

$D=27$（计算过程省略）。

由于 $D\neq 0$，所以此方程组可以用克拉默法则来求解。

前面说了这么多，我只是告诉了大家什么样的方程组可以使用克拉默法则去求解。同学们现在一定是迫不及待地想知道，当一个方程组可以用克拉默法则求解时，克拉默法则到底应该如何使用。别着急，我现在就来结合一道题来具体讲解克拉默法则。

例.解方程组：$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$

解：由于此方程组满足克拉默法则的使用条件，因此可以使用克拉默法则来求解此方程组。

第（1）步：计算方程组对应的系数行列式 D（这一步其实就是刚才所讲的“判断某方程组是否可以用克拉默法则求解”的第（3）步）。

此题第一个方程：$2x_1+x_2-5x_3+x_4=8$

系数为：2　1　-5　1

第二个方程：$x_1-3x_2-6x_4=9$

系数为：1　-3　0　-6（其中没有 x_3 这一项，所以 x_3 的系数当然就是 0）

第三个方程：$2x_2-x_3+2x_4=-5$

系数为：0　2　-1　2（其中没有 x_1 这一项，所以 x_1 的系数当然就是 0）

第四个方程：$x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0$

系数为：1　4　−7　6

因此，所有未知数的系数所组成的行列式为：

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ 1 & -3 & 0 & -6\\ 0 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}$$

利用“第三车砖”中所讲的方法，计算得出：

D=27（计算过程省略）。

第（2）步：用方程右侧的常数分别代替系数行列式 D 的第一列、第二列、……、最后一列，得到行列式 $D_1, D_2, \cdots\cdots D_n$。

此题：方程右侧的常数为：$\begin{pmatrix}8\\ 9\\ -5\\ 0\end{pmatrix}$

用 $\begin{pmatrix}8\\ 9\\ -5\\ 0\end{pmatrix}$ 代替第一列，得出：$D_1=\begin{vmatrix}8 & 1 & -5 & 1\\ 9 & -3 & 0 & -6\\ -5 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -7 & 6\end{vmatrix}=81$

用 $\begin{pmatrix}8\\ 9\\ -5\\ 0\end{pmatrix}$ 代替第二列，得出：$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8 & -5 & 1\\ 1 & 9 & 0 & -6\\ 0 & -5 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -7 & 6\end{vmatrix}=-108$

用 $\begin{pmatrix}8\\ 9\\ -5\\ 0\end{pmatrix}$ 代替第三列，得出：$D_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 8 & 1\\ 1 & -3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 2\\ 1 & 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=-27$

用$\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$代替第四列，得出：$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$

第（3）步：$x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \dfrac{D_n}{D}$。

此题：$\begin{cases} x_1 = \dfrac{81}{27} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-108}{27} = -4 \\ x_3 = \dfrac{-27}{27} = -1 \\ x_4 = \dfrac{27}{27} = 1 \end{cases}$

1.6　第六车砖——矩阵

按说这“第六车砖”应该是线性代数大楼中第二层的砖，不是第一层的砖，但是由于这第一层的四个房间 101、102、103、104 所对应的习题涉及到了矩阵最基本的知识，所以我就把它作为第一层的砖啦。

矩阵用“(　)”或“[　]”来表示。如$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$等。

大家看到了吧，一个矩阵的行数和列数可以不相等。换句话说：一个矩阵有 m 行 n 列，m 不一定等于 n（当然也可以 m=n）。

我们知道，行列式用双竖线“|”表示，行列式的本质是一个数，而矩阵表示的可不是一个数，“(　)”或“[　]”里写了几个数它就表示几个数的组合，如矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$表示 1，2，3，4，5，6 这六个数按照第一行从左到右放 1，2，3，第二行从左到右放 4，5，6 组成的一个长方形。

1.7 第七车砖——矩阵的运算

我们知道，由于行列式的本质是一个数，所以行列式本身就是可以进行计算的，如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$，而矩阵就不同了，矩阵的本质是 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的长方形，不存在“一个矩阵的值是多少”这种说法，因为一个矩阵“（ ）”内写的那些数本身就是一个个的值。因此，一个矩阵本身并不存在运算的概念，矩阵需要借助外力才能运算。

矩阵的运算共有三种，下面分别介绍。

1.7.1 矩阵与矩阵相加

例.计算$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

解：因为 1+5=6，2+6=8，3+7=10，4+8=12，所以：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

注意：只有行数和列数均相同的矩阵才能相加。如：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$，这两个矩阵列数相同，都是两列，但行数不同，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$有三行，$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$有二行，所以不能相加。而$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，这两个矩阵行数和列数都相同（都是三行二列的矩阵），所以可以相加。

矩阵相加的原则：**两个矩阵中对应位置的数字相加。**

例.计算$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 8\\9 & 10\\11 & 12\end{pmatrix}$

因为 1 对应 7，2 对应 8，3 对应 9，4 对应 10，5 对应 11，6 对应 12。

所以：$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 8\\9 & 10\\11 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 10\\12 & 14\\16 & 18\end{pmatrix}$

1.7.2　数字与矩阵相乘

这个最简单，只需用数字乘以矩阵中的每一个数即可。

例.计算$3\times\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}$

解：$3\times\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\9 & 12\\15 & 18\end{pmatrix}$

1.7.3　矩阵与矩阵相乘

$A_{a\times b}$：表示矩阵 A 有 a 行 b 列。

先来讲一下何时两个矩阵可以相乘：如果两个矩阵满足 $A_{a\times b}$， $B_{b\times c}$，则矩阵 A 可以乘以矩阵 B，即 $A\times B$ 存在。

解释：矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相同时，就可以用矩阵 A 乘以矩阵 B（矩阵 A 写在乘号左侧）。

例.判断下列矩阵可以相乘吗?

（1） $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}$,　　$B=\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\\9 & 10\end{pmatrix}$

解：先来看 $A\times B$ 存在还是不存在。A有三行两列，只关注列数，是：2。B也有三行两列，只关注行数，是：3。由于 $2\neq 3$，所以 $A\times B$ 不存在。

再来看 $B\times A$ 存在不存在。那就看B的列数与A的行数是否一致。B有两列，A有三行，由于 $2\neq 3$，所以 $B\times A$ 也不存在。

（2） $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}_{4\times 1}$， $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}_{1\times 3}$

解：先来看 $A\times B$ 存在不存在。A有四行一列，只关注列数，是：1。B有一行五列，只关注行数，是 1。由于 1=1，所以 $A\times B$ 存在，可以乘，至于结果是多少，我们一会再讨论。

再来看 $B\times A$ 存在不存在。那就看B的列数与A的行数是否一致。B有五列，A有四行，由于 $4\neq 5$，所以 $B\times A$ 不存在，即不能进行 $B\times A$。

通过以上两个例子我们可以知道，$A\times B$与$B\times A$可不一定相等（别说相不相等了，有可能一个存在而另一个都不存在，何谈相等）。

第一个问题（能乘还是不能乘的问题）已经讨论完了，接下来该讨论的是：如果能乘的话，乘完后到底得什么。这个问题又分两个阶段来讨论。

先来讨论 $A_{a\times b}\times B_{b\times c}$ 相乘，乘完后得到的新矩阵C是一个几行几列的矩阵。**我现在告诉大家：以乘号左侧的矩阵的行数作为新矩阵的行数，以乘号右侧的矩阵的列数作为新矩阵的列数。**

例.判断矩阵A乘以矩阵B后，得到一个几行几列的矩阵。

（1） $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}_{3\times 2}$， $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\6 & 7 & 8 & 9 & 10\end{pmatrix}_{2\times 5}$

解：A的列数是 2，B的行数是 2，因为 2=2，所以 $A\times B$ 存在。由于A的行数是 3，B的列数是 5，所以 $A\times B=C_{3\times 5}$。即：$A\times B$ 得到的矩阵是一个三行五列的矩阵。

而B的列数是 5，A的行数是 3，因为 $5\neq 3$，所以 $B\times A$ 根本不存在。

（2） $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}_{4\times 1}$， $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\end{pmatrix}_{1\times 3}$

解：A的列数是 1，B的行数是 1，因为 1=1，所以 $A\times B$ 存在。由于 A的行数是 4，B的列数是 3，所以 $A\times B=C_{4\times 3}$。即：$A\times B$ 得到的矩阵是一个四行三列的矩阵。

而 B的列数是 3，A的行数是 4，因为 $3\neq 4$，所以 $B\times A$ 根本不存在。

再来讨论如何求出具体的值，我们还是用一道例题来讲解。

例. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$　，求 $A\times B$？

解：A 为 $A_{2\times 3}$，B 为 $B_{3\times 2}$，因为 3=3，所以 $A\times B$ 可以乘，（顺便提一句，此题 $B\times A$ 也存在，但原因就不是 3=3 了，而是 2=2）且 $A\times B=C_{2\times 2}$。

好了，现在我们已经知道C是一个两行两列的矩阵了，所以C中一共有四个数。现在就是要把这四个数求出来。此刻还没求出来，因此暂且用以下矩阵代替。

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

注意：c_{mn} 中的 m 代表该数处于矩阵中的第 m 行，c_{mn} 中的 n 代表该数处于矩阵中的第 n 列。所以 c_{mn} 代表矩阵中处于第 m 行第 n 列的那个数。

下面开始正式求C，请注意看：

$$A\times B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

c_{11}：用 A的第一行的数字乘以 B的第一列的对应数字，然后相加。

A的第一行为：$(1\quad 2\quad 3)$

B的第一列为：$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$

$$c_{11}=1\times 1+2\times 2+3\times 3=14$$

c_{12}：用 A 的第一行的数字乘以 B 的第二列的对应数字，然后相加。

A 的第一行为：$(1 \quad 2 \quad 3)$

B 的第二列为：$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_{12} = 1\times 3 + 2\times 2 + 3\times 1 = 10$

c_{21}：用 A 的第二行的数字乘以 B 的第一列的对应数字，然后相加。

A 的第二行为：$(3 \quad 2 \quad 1)$

B 的第一列为：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$c_{21} = 3\times 1 + 2\times 2 + 1\times 3 = 10$

c_{22}：用 A 的第二行的数字乘以 B 的第二列的对应数字，然后相加。

A 的第二行为：$(3 \quad 2 \quad 1)$

B 的第二列为：$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c_{22} = 3\times 3 + 2\times 2 + 1\times 1 = 14$

所以：$A\times B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}_{2\times 2}$

矩阵与矩阵相乘已经介绍完了，相信你们已经基本掌握，为了巩固知识，我们再来看一道例题。

例. $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$，求 $A\times B$ 和 $B\times A$ ？

解：这道题的解题方法与上一道题完全一致，只不过是让你再巩固一下而已。

$$A\times B=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

$$c_{11}=-2\times 2+4\times(-3)=-16$$
$$c_{12}=-2\times 4+4\times(-6)=-32$$
$$c_{21}=1\times 2+(-2)\times(-3)=8$$
$$c_{22}=1\times 4+(-2)\times(-6)=16$$

所以：$A\times B=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 6\end{pmatrix}$

$$B\times A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

$$c_{11}=2\times(-2)+4\times 1=0$$
$$c_{12}=2\times 4+4\times(-2)=0$$
$$c_{21}=(-3)\times(-2)+(-6)\times 1=0$$
$$c_{22}=-3\times 4+(-6)\times(-2)=0$$

所以：$B\times A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

1.8　第八车砖——矩阵的转置

矩阵 A，它的转置记为 A^T 。

例. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$　求 A^T ？

解：$A^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$

1.9 第九车砖——方阵、对角矩阵、单位矩阵、逆矩阵

1.9.1 方阵

方阵：行数等于列数的矩阵称为方阵。

例. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&3&0&9\\5&8&9&4\\0&4&2&2\\7&8&3&0\end{pmatrix}$都是方阵。

1.9.2 对角矩阵

对角线上的数有没有 **0** 无所谓，但除了对角线以外其他位置的数全是 **0** 的方阵叫对角矩阵。

注意：对角矩阵一定是方阵，并且是特殊的方阵。

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$等都是对角矩阵。

切记：类似$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&4&0\\9&0&0\end{pmatrix}$这样的矩阵可不是对角矩阵。因为对角线指的是从左上到右下的斜线，而不是从右上到左下的斜线。所以$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&4&0\\9&0&0\end{pmatrix}$不是对角矩阵，但它是方阵，因为

行数=列数。

1.9.3　单位矩阵

对角线上的数全为 1 的对角矩阵称为单位矩阵。

注意：单位矩阵一定是方阵，也一定是对角矩阵，并且是特殊的方阵、特殊的对角矩阵。

例.$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，　$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$等都是单位矩阵，n 阶单位矩阵用 E_n 表示。如：

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

总结：前面讲到的三种矩阵是逐步递进的关系，对角矩阵是特殊的方阵，而单位矩阵又是特殊的对角矩阵，更是特殊的方阵。

1.9.4　逆矩阵

设 A 为 n 阶方阵（意思是 n 行 n 列的矩阵），B 也是 n 阶方阵，　E 为 n 阶单位矩阵，若有：

$AB=E$（或 $BA=E$），则称 B 是 A 的逆矩阵，记作 $B=A^{-1}$。

记住，只有方阵才有逆矩阵，但是并不是只要是方阵都有逆矩阵。即：矩阵 A 有逆矩阵可以推出矩阵 A 一定是方阵，但是矩阵 A 是方阵却推不出矩阵 A 有逆矩阵。

那么 A^{-1} 到底该怎么去求呢？用公式法求 A^{-1}。公式是 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^*$，用文字来说就是：$A$ 的逆矩阵 A^{-1} 等于 A 的行列式的倒数再乘以 A^*。现在知道为什么只有方阵才有逆矩阵了吧，因为求逆的公式中有 $|A|$ 这一项，$|A|$ 指的是矩阵 A 所对应的行列式。如果 A 不是方阵，怎么可能有对应的行列式呢（行列式的行数和列数一定相等，所以只有方阵才有对应的行列式）。

那么 A^* 又是什么呢，A^* 称为矩阵 A 的伴随矩阵。不过光知道 A^* 叫什么名字肯定是不够的，我们还得知道 A^* 应该如何去求。现在我就来告诉大家，A^* 中的数是矩阵 A 中的所

有元素的代数余子式组成的矩阵再转置。这么说你肯定不懂，肯定还是不知道 A^* 是什么（这不奇怪，因为我还没讲代数余子式呢）。所以，来看一道例题。

例.设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$，求 A^{-1}？

解：用公式，$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\times A^*$

先来算 $|A|$，$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{vmatrix}=2$（算过程省略）

故：$A^{-1}=\dfrac{1}{2}\times A^*$

现在要计算 A^* 了。A 中包含九个数，所以我们要算九次。还记得讲降阶法的时候吗？那时说的是任意选中一行或一列，现在不选了，这九个数都要用。但与降阶法不同的是：这九个数自身不用在最前面乘了。但有一项（－1）还必须乘，即：

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&0\\2&-5\end{vmatrix}=-5,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&0\\-3&-5\end{vmatrix}=10,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix}=7$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0&1\\2&-5\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&1\\-3&-5\end{vmatrix}=-2,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=2,\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1$$

记 $B=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&10&7\\2&-2&-2\\-1&2&1\end{pmatrix}$

则：$A^*=B^T=\begin{pmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}$

则：

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 10 & -2 & 2\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 5 & -1 & 1\\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

此题就完成了。

介绍两个名词，请务必记住。

名词 1：A_{mn}。A_{mn} 称为 a_{mn} 的代数余子式。计算 a_{mn} 的代数余子式 A_{mn} 的方法是"$A_{mn}=(-1)^{m+n}\times$原行列式去掉第m行和第n列后剩下的行列式"，如上例中的 A_{11} 就是 a_{11} 的代数余子式。代数余子式是一个数。

名词 2: M_{mn}。M_{mn} 称为 a_{mn} 的余子式。计算 M_{mn} 与计算 A_{mn} 的区别就是不用乘以前面的 $(-1)^{m+n}$ 了。如上例中 a_{11} 的代数余子式为：$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-5$，而 a_{11} 的余子式为：$M_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -5\end{vmatrix}=-5$。元素 a_{mn} 的代数余子式 A_{mn} 与余子式 M_{mn} 之间有如下转化关系：

$A_{mn}=(-1)^{m+n}M_{mn}$ 或 $M_{mn}=(-1)^{m+n}A_{mn}$

1.10　第十车砖——矩阵的向量表示法

例. $A=\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}$，其中 $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$、$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$、$\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$

看见了吧，矩阵 A 明明是 $\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$，但是它可以用三个列向量 $\vec{\alpha}$、$\vec{\beta}$、$\vec{\gamma}$ 表示。

$\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$ 是一样的，只不过换了一种表示方法而已。当然，矩阵 A 也可以用三个行向量表示。表示如下。

$$A=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\\ \vec{\beta}\\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}$$，其中 $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\end{pmatrix}$、$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\end{pmatrix}$、$\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\end{pmatrix}$。

关于向量有两点要注意的：

- 向量分为行向量、列向量。行向量是：行数为 **1**、列数为 **n** 的矩阵；列向量是：行数为 **n**、列数为 **1** 的矩阵。
- 用于表示向量的字母的上方必须要加有“$\rightarrow$”。如：$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，而不能写成 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$。

终于把砖运来了

一车接一车，线性代数大楼第一层的砖终于运来了。别紧张，以后每层的砖并没有这么多，就这第一层的砖多，打地基嘛。接下来我们就要建造第一层的四个房间：房间 101，房间 102，房间 103 和房间 104 了。

我在此再次强调：上面的“砖”中的内容你只要理解了并且会使用就行，而接下来的“房间”中的内容，不但要理解且会使用，还要找白纸默写下来，因为“房间”中的内容是考研的考点。每章如此，保你线性代数满分。

1.11　房间 101——关于代数余子式的三句话

1.11.1　第一句话

改变行列式的一行，行列式的值或许变了，但新行列式中该行每个元素的代数余子式，与原行列式中该行每个元素的代数余子式对应相等。

我们来验证一下第一句话。

例. $D_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$

其中 1 的代数余子式是 $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{vmatrix}$。

其中 2 的代数余子式是 $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 6\\7 & 9\end{vmatrix}$。

其中 3 的代数余子式是 $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 5\\7 & 8\end{vmatrix}$。

现在我把第一行的三个数 1、2、3 改成任意三个数，比如就改成 90、91、92 吧，即：

$$D_2=\begin{vmatrix}90 & 91 & 92\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}。$$

其中 90 的代数余子式是 $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{vmatrix}$。

其中 91 的代数余子式是 $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 6\\7 & 9\end{vmatrix}$。

其中 92 的代数余子式是 $(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 5\\7 & 8\end{vmatrix}$。

看见了吧，原行列式第一行的 1，2，3 变为了 90，91，92，这虽然导致了变换前后行列式的值发生了改变（$D_1 \neq D_2$），但是 1 和 90，2 和 91，3 和 92 的代数余子式是一样的。这就是“第一句话”想要告诉大家的。

1.11.2　第二句话

一个行列式某行的每个数分别乘以自己的代数余子式后相加，就是行列式的值；一个行列式某行的每个数分别乘以其他任意一行与其同列的数的代数余子式后相加，等于 **0**。

例. $A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$

则必有：$\begin{cases}1A_{11}+2A_{12}+3A_{13}=A\\4A_{21}+5A_{22}+6A_{23}=A\\7A_{31}+8A_{32}+9A_{33}=A\\4A_{11}+5A_{12}+6A_{13}=0\\7A_{11}+8A_{12}+9A_{13}=0\\1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}=0\\7A_{21}+8A_{22}+9A_{23}=0\\1A_{31}+2A_{32}+3A_{33}=0\\4A_{31}+5A_{32}+6A_{33}=0\end{cases}$

1.11.3 第三句话

对于任意 n 阶行列式来说：$X_1A_{m1}+X_2A_{m2}+\ldots+X_nA_{mn}$ 的值就是把原行列式的第 m 行变为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 后的新行列式的值。

这第三句话是由前两句话推出来的，也是这三句话中最重要的一句话。

例.对于任意三行三列的行列式来说，$A_{11}+A_{12}+A_{13}$ 的值就是把原行列式的第一行变为 1，1，1 后新行列式的值。

如：$A=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，则 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1&1&1\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

例.对于任意三行三列的行列式来说，$3A_{11}+4A_{12}+5A_{13}$ 的值就是把原行列式的第一行变为 3，4，5 后新行列式的值。

如：$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，$3A_{11}+4A_{12}+5A_{13}=\begin{vmatrix}3&4&5\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

例.对于任意三行三列的行列式来说，$3A_{21}+4A_{22}+5A_{23}$ 的值就是把原行列式的第二行变为 3，4，5 后新行列式的值。

如：$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$，$3A_{21}+4A_{22}+5A_{23}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&5\\7&8&9\end{vmatrix}$

例.对于任意四阶行列式来说，$8A_{31}+9A_{32}+46A_{33}+2A_{34}$的值就是把原行列式的第三行变为 8，9，46，2 后的新行列式的值。

如：$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$，　$8A_{31}+9A_{32}+46A_{33}+2A_{34}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\8&9&46&2\\13&14&15&16\end{vmatrix}$

现在大家应该明白了吧。但是有一个很重要的知识点需要注意，那就是：**给的加法式子中的项数必须与行列式的阶数相同才行，否则的话你需要补 0**。来看下面例子。

例.$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$，计算$1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}$

有的同学这样做：$1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$，然后由于有两行相同，故答案为 0。**这种做法完全错误**，之所以错误，是因为题目中所给的行列式是一个四行四列（四阶）的行列式，而让计算的那个加法式子只含三项，所以不能这么做。

正确的做法应该是：将所求的式子$1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}$改写为：

$1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}+0A_{24}$

然后：$1A_{21}+2A_{22}+3A_{23}+0A_{24}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&0\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$

房间 101 已经讲完了，下面我们来看相应的考研题。

1.11.4 真题分析

提示：考研真题分析统统套上黑框，让我们用之前的学习埋葬他们吧！

考研题 1.1 设

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 2 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 5\end{vmatrix},$$

计算：（1） $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$，

（2） $M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}$。

解：（1）

$$\begin{aligned}A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}&=1A_{41}+1A_{42}+1A_{43}+1A_{44}\\&=\begin{vmatrix}-2 & 2 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\\&=0\end{aligned}$$

（2）由本章的"第九车砖"可知， $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

故：

$$\begin{aligned}M_{31}+M_{32}+M_{33}+M_{34}&=A_{31}-A_{32}+A_{33}-A_{34}\\&=\begin{vmatrix}-2 & 2 & -2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 5\end{vmatrix}\\&=0（\text{因为此行列式的第一、三行成比例}）\end{aligned}$$

考研题 1.2 设

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&3&3\\3&2&5&4&2\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}$$

求：（1） $A_{31}+A_{32}+A_{33}$

（2） $A_{34}+A_{35}$

解：把这道题的两问一起做。

$$\begin{aligned}&5A_{31}+5A_{32}+5A_{33}+3A_{34}+3A_{35}\\&=5\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}\right)+3\left(A_{34}+A_{35}\right)\\&=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&3&3\\5&5&5&3&3\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2A_{31}+2A_{32}+2A_{33}+1A_{34}+1A_{35}\\&=2\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}\right)+1\left(A_{34}+A_{35}\right)\\&=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\5&5&5&3&3\\2&2&2&1&1\\2&2&2&1&1\\4&6&5&2&3\end{vmatrix}\\&=0\end{aligned}$$

把上面两个式子写在一起：

$$\begin{cases}5\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}\right)+3\left(A_{34}+A_{35}\right)=0\\2\left(A_{31}+A_{32}+A_{33}\right)+1\left(A_{34}+A_{35}\right)=0\end{cases}$$

设 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=x,\quad A_{34}+A_{35}=y$

则有：

$$\begin{cases}5x+3y=0\\2x+y=0\end{cases}\qquad 解得：\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

所以 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=0,\quad A_{34}+A_{35}=0$ 。

1.12　房间 102——克拉默法则的推论

在前面的“第五车砖”中，我给大家讲了克拉默法则，本节要讲的是克拉默法则的推论，具体来说就是四个充分必要条件而已，没什么神秘的。但是，在正式介绍这四个充分必要条件之前，我要强调一件很重要的事，那就是：**接下来要给大家介绍的四个充分必要条件中都会出现“方程组”一词，该词指的一定是同时满足如下两个条件的方程组。**

（1）方程组中每一个方程的形式都是：

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（其中$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$为任意常数）。

（2）方程组包含的方程个数等于未知数个数。

好，下面开始正式介绍四个充分必要条件。

齐次方程组

①系数行列式 $D=0\Leftrightarrow$ 该齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）（非零解）。

②系数行列式 $D\neq 0\Leftrightarrow$ 该齐次方程组有唯一零解。

非齐次方程组

③系数行列式 $D=0\Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）或无解。

④系数行列式 $D\neq 0\Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有唯一解（用前面第五车砖讲的方法去计算）。

以上黑框中就是我刚刚提到的四个充分必要条件（也就是克拉默法则的推论），难道这就算讲完了吗？当然不是。我要详细的给大家解释一下这四个充分必要条件，而且是一个一个的解释。

不过，在我一个一个的解释这四个充分必要条件之前，我先针对 “$\Leftrightarrow$”、 “系数行列式 D” 、“齐次方程组和非齐次方程组”这三者做一下解释。

（1）针对“$\Leftrightarrow$”的解释：以上四个充分必要条件中都出现了“$\Leftrightarrow$”，符号“$A \Leftrightarrow B$”的意思是 A 与 B 互为充分必要条件。

（2）针对“系数行列式 D”的解释：以上四个充分必要条件中都出现了“系数行列式 D”一词，该词是什么意思呢？我举例来说明。

例如，在方程组

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + 5x_4 = 0 \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 \ - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 15x_4 = 0 \\ 6x_1 \qquad\ \ - 8x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

中，D 为

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & -2 \\ 3 & -8 & -12 & 15 \\ 6 & 0 & -8 & 9 \end{vmatrix}$$

。

（3）针对“齐次方程组和非齐次方程组”的解释：以上四个充分必要条件的前两个中出现了“齐次方程组”一词，后两个中出现了“非齐次方程组”一词。下面我来做一下解释。先来给大家举两个例子。

例.

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \qquad\qquad + 5x_4 = 0 \\ 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 \ - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 15x_4 = 0 \\ 6x_1 \qquad\ \ - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 \ - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

就是一个齐次方程组。

例.

$$\begin{cases} 18x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \\ 6x_1 - 14x_2 + 9x_3 - 10x_4 = 3 \\ 7x_1 - 9x_2 \qquad\qquad + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

就是一个非齐次方程组。

通过以上两个例子，我为大家引出齐次方程组和非齐次方程组的定义。齐次方程组：**若某方程组中所有方程的等式右侧的常数全为 0，则该方程组叫做齐次方程组，否则，该方程组叫非齐次方程组。**

好，针对“$\Leftrightarrow$”、“系数行列式 D”、“齐次方程组和非齐次方程组”这三者的解释已经结束了。接下来我要详细的给大家解释一下这四个充分必要条件，而且是一个一个的解释。

1.12.1　第一个充分必要条件

好，我们现在先来看第一个充分必要条件“①**系数行列式 $D = 0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有无**

穷多组解（非唯一解）（非零解）”的意思。这句话的意思是：计算出齐次方程组的系数行列式 D 的值，如果 D 的值为 0，则说明该齐次方程组有无穷多组解。下面我解释一下什么叫“无穷多组解”。$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_2 = a_2 \\ x_3 = a_3 \\ x_4 = a_4 \end{cases}$，这叫 x_1、x_2、x_3、x_4 的**一组**取值，如果这组取值能使上述方程组成立，那么这组取值就叫上述方程组的**一组**解。所谓某方程组有无穷多组解，指的是 x_1, x_2, x_3, x_4 有无穷多组取值都可以让该方程组成立。现在明白了吧。然后呢，我继续说，由于是充分必要条件，所以若某齐次方程组有无穷多组解，那么也能由此推出该齐次方程组的系数行列式 D 的值为 0。

至此，这第一个充分必要条件还没有讲完，现在我继续讲。对于齐次方程组来说，有无穷多组解和有非唯一解是一个意思，因为对于齐次方程组而言，要不就只有唯一的一组解，要不就肯定有无穷多组解，**不可能**出现比如**只有**两组解、三组解等等的情况。所以我说对于齐次方程组来说，有无穷多组解和有非唯一解是一个意思。明白了吧，正因为如此，我才在后面写了个括号，括号里面写着“非唯一解”。

另外，对于齐次方程组来说，有无穷多组解和有非零解也是同一个意思。因为对于齐次方程组而言，如果它有唯一的一组解，那一定就是零解（所有未知数全取 0），所以某齐次方程组有非零解意味着该齐次方程组有非唯一解，而我刚才已经告诉大家了，齐次方程组有非唯一解和有无穷多解是一个意思，所以，齐次方程组有非零解与齐次方程组有无穷多解也是一个意思。

综上，对于齐次线性方程组来说：有无穷多解、有非唯一解、有非零解的意思完全一样。

好，现在第一个充分必要条件“**①系数行列式 $D=0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）（非零解）**”我已经解释完了。

1.12.2 第二个充分必要条件

好，我们现在再来看第二个充分必要条件“**②系数行列式 $D \neq 0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有唯一零解**”的意思。千万别忘了，第一个充分必要条件和第二个充分必要条件针对的可都是齐次方程组。言归正传，这第二个充分必要条件的意思是：计算出齐次方程组的系数行列式 D 的值，如果 D 的值不为 0，则说明该齐次方程组只有唯一的一组解。而我之前已经说了，对于齐次方程组而言，有唯一解和仅有零解（所有未知数全取 0）的意思是一样的，所以对于齐次方程组而言，有“唯一解”和有“唯一零解”意思完全一样，因此我用的词是“唯一零解”。另外，由于是充分必要条件，所以若某齐次方程组有唯一零解，那么也能由此推出该齐次方程组的系数行列式 D 的值一定是不为 0 的。

第二个充分必要条件"②**系数行列式 $D \neq 0 \Leftrightarrow$ 该齐次方程组有唯一零解**"我也给大家解释完了。

截止到目前为止，这四个充分必要条件的前两个我已经都给大家解释完了，请消化吸收。接下来我们就来看看第三个充分必要条件和第四个充分必要条件。

1.12.3 第三个充分必要条件

再来看第三个充分必要条件"③**系数行列式 $D = 0 \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）或无解**"，这第三个充分必要条件是针对非齐次方程组的。其中的 D 仍然指的是方程组中所有未知数的系数所组成的行列式。这第三个充分必要条件的意思是：计算出非齐次方程组的系数行列式 D 的值，如果 $D = 0$，则说明该非齐次方程组有无穷多组解或无解。由于是充分必要条件，所以反之也成立。

值得注意的是，齐次方程组是不可能无解的，因为所有未知数全取 0 一定是齐次方程组的一组解，无论齐次方程组是什么样的，不信你自己试试。但非齐次方程组是有可能无解的。另外，由于非齐次方程组也不可能出现只有两组或三组解的情况，所以某非齐次方程组有无穷多组解和有非唯一解的意思是一样的。因此我在"无穷多组解"后面加了个括号，括号里面写着"非唯一解"。

好，关于第三个充分必要条件"③**系数行列式 $D = 0 \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有无穷多组解（非唯一解）或无解**"的解释到此结束。

1.12.4 第四个充分必要条件

最后，我们来看第四个充分必要条件"④**系数行列式 $D \neq 0 \Leftrightarrow$ 该非齐次方程组有唯一解（用前面第五车砖讲的方法去计算）**"。这第四个充分必要条件的意思是：计算出非齐次方程组的系数行列式 D 的值，如果 $D \neq 0$，则说明该非齐次方程组有唯一解。怎么把这"唯一解"求出来呢？用之前"第五车砖——克拉默法则"中所讲的方法去求，明白了吧。

好，房间 102 已经讲完了，下面我们来看相应的考研题。

1.12.5 真题分析

考研题 1.3 问 λ 取何值时，齐次线性方程组：

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解。

解：根据房间 102 中的第一个充分必要条件，得出：

此方程组有非零解 $\Leftrightarrow D=0$。

所以：$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$

然后解出 λ 即可，求解过程如下：

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}\text{（利用第四车砖中讲的性质5，第三行}\times 2\text{以后加到第一行）}$$

$$=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 6-2\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}\text{（利用第四车砖中讲的性质5，第一列}\times -2\text{以后加到第三列）}$$

$$=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -\lambda-1 \end{vmatrix}\text{（利用第三车砖，选择第一行使用降阶法）}$$

$$=(3-\lambda)(\lambda-2)\lambda$$

$$=0$$

解得：$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$

这道题做完了，但是需要注意的是：此题求解行列式的过程完全是我自己的做法，一百个人可能有一百种不同的求解行列式的方法，但是最后的答案肯定是和我一样的。

考研题 1.4 设：

$$\vec{\xi}=\left(a_1,a_2,......,a_n\right)^T,\qquad \vec{\xi}^T\vec{\xi}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$$

证明：$\left|E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right|=0$

解：我先把这道题翻译一下。$\vec{\xi}$ 是一个列向量，注意，它是列向量而不是行向量，因为右上角有转置符号“T”。我们接着看：$\vec{\xi}^T\vec{\xi}=1$，1 是一个数，两个向量相乘怎么会得

到一个数呢？这一点儿也不奇怪，我现在就来帮大家分析一下“$\vec{\xi}^T\vec{\xi}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$”的意思。

根据题意：$\vec{\xi}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

所以，$\vec{\xi}^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$

所以，$\vec{\xi}^T\vec{\xi}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\times\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

这是矩阵与矩阵相乘，一行 n 列的矩阵乘以 n 行一列的矩阵，最后得到的一定是一个一行一列的矩阵。一行一列的矩阵就是一个数，明白了吧。

也就是说，就算题中没告诉我们$\vec{\xi}^T\vec{\xi}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=1$这句话，我们也能知道如下两点：

- $\vec{\xi}^T\vec{\xi}$的结果是一个数字。
- $\vec{\xi}^T\vec{\xi}=a_1\times a_1+a_2\times a_2+\cdots+a_n\times a_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$

题中告诉我们这句话的目的就是想告诉我们：这个数字是 1，仅此而已。

再来看看最后要证明的是什么：

$$\left|E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right|=0$$

我们先来看$\vec{\xi}\vec{\xi}^T$是什么？$\vec{\xi}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，所以：$\vec{\xi}\vec{\xi}^T$等于$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{pmatrix}_{n\times1}\times(a_1,a_2,\cdots,a_n)_{1\times n}$。一个 n 行一列的矩阵乘以一个一行 n 列的矩阵，最后得到的一定是一个 n 行 n 列的矩阵。由此可知，E 这个单位矩阵也是 n 行 n 列的，否则没法减。当然，$E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T$后得到的仍然是一个 n 行 n 列的矩阵。现在要证明的就是，这个矩阵所对应的行列式的值为 0，即$\left|E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right|=0$。

这道题考的就是房间 102 中的四个充分必要条件的第一个。只要我们构造一个齐次方程组，把此题中的$\left|E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right|$作为该方程组的系数行列式$D$。根据四个充分必要条件的第一个，要证$D=0$，只需证明我们构造的这个齐次方程组有非零解即可。

我们应该这样构造这个齐次方程组：

$$\left(E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right)\vec{X}=\vec{0}$$

同学们，看到这里你们是否觉得奇怪，$\left(E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right)\vec{X}=\vec{0}$怎么是一个齐次方程组呢？你们印象中的齐次方程组应该是如下面这个样子的：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_1+9x_2-4x_3+8x_4=0\\5x_1-6x_2+10x_3=0\\6x_1-5x_2-9x_4=0\end{cases}$$

那么现在我要告诉大家，以上这个方程组还有另外一种写法：$A\vec{X}=\vec{0}$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&9&-4&8\\5&-6&10&0\\6&-5&0&-9\end{pmatrix},\quad \vec{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\quad \vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

不信的话，我现在把 $A\vec{X}=\vec{0}$ 展开：

$$A\vec{X}=\vec{0}$$

即 $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&9&-4&8\\5&-6&10&0\\6&-5&0&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

根据矩阵乘法，有：$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\2x_1+9x_2-4x_3+8x_4=0\\5x_1-6x_2+10x_3=0\\6x_1-5x_2-9x_4=0\end{cases}$

发现了吧，与你们想像中的方程组是一样的。所以以后记住：齐次方程组可以用 $A\vec{X}=\vec{0}$ 表示（同理，非齐次方程组可以用 $A\vec{X}=\vec{\beta}$ 表示）。

现在我们回到此题，此题我们构造齐次方程组：$\left(E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right)\vec{X}=\vec{0}$，由于

$$\left(E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right)\vec{\xi}\overset{☆}{=}\vec{\xi}-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\vec{\xi}\overset{☆}{=}\vec{\xi}-\vec{\xi}\left(\vec{\xi}^T\vec{\xi}\right)=\vec{\xi}-\vec{\xi}\times 1=\vec{\xi}-\vec{\xi}=\vec{0}$$

好，现在我们只看上式最左侧和最右侧，可得：

$$\left(E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right)\vec{\xi}=\vec{0}$$

这说明什么？说明 $\vec{\xi}$ 是齐次方程组 $\left(E-\vec{\xi}\vec{\xi}^T\right)\vec{X}=\vec{0}$ 的解。

而 $\vec{\xi}$ 不是零向量（它如果是零向量的话，意味着 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都为 0，那么 $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ 就肯定是 0，而不会是 1，所以 $\vec{\xi}$ 不是零向量），说明 $\left(E - \vec{\xi}\vec{\xi}^T\right)\vec{X} = \vec{0}$ 这个齐次方程组有非零解。再根据房间 102 所说的四个充分必要条件的第一个，可得 $\left|E - \vec{\xi}\vec{\xi}^T\right| = 0$。

此题做完了，不难。但是我要提醒一下，上面有两处我画了☆，第一处☆意思是说该处利用了矩阵乘法对矩阵加减法具有分配律，第二处☆意思是说该处利用了矩阵乘法具有结合律，这两个算律在下一章会讲到，但这题用到了，怕大家看不懂，所以在这里提醒大家一下。

考研题 1.5 设 A 是 n 阶矩阵，满足 $A^2 = A$，且 $A \neq E$，证明 $|A| = 0$。

解：

$A - E = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n\right)$

$A^2 = A$

$\Rightarrow A^2 - A = O$（注意，O的意思是零矩阵，不是数0，因为两个矩阵相减肯定还得出矩阵）

$\Rightarrow A \times A - A \times E = O$（任何矩阵乘以单位矩阵$E$都等于它本身，所以$A$可以写为$A \times E$）

$\overset{\Delta}{\Rightarrow} A(A - E) = O$（$\Delta$处利用了矩阵乘法对于矩阵加减法具有分配律，下一章会讲）

好，现在我们关注这个式子：$A(A-E) = O$，把矩阵 $A - E$ 用列向量表示，即矩阵，把等式右侧的零矩阵也用列向量表示，即矩阵 $O = \left(\vec{0}, \vec{0}, \cdots, \vec{0}\right)$，则 $A(A-E) = O$ 这一个等式可以根据矩阵的乘法拆成 n 个等式：

$A\vec{a}_1 = \vec{0}$（此 $\vec{0}$ 为零矩阵中最左侧的零向量）

$A\vec{a}_2 = \vec{0}$（此 $\vec{0}$ 为零矩阵中从左向右数第二个零向量）

……

$A\vec{a}_n = \vec{0}$（此 $\vec{0}$ 为零矩阵中从左向右数最后一个零向量）

而这些等式中的$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$正是齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的一组组解。又：根据题意$A\neq E$，说明$A-E$不是零矩阵，而我们把矩阵$A-E$分成了$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$这些列向量，所以$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$这些列向量中至少有一个列向量不是零向量，即$A\vec{X}=\vec{0}$有非零解，根据房间 102 中的四个充分必要条件的第一个，得$|A|=0$。

1.13　房间 103——关于行列式的两种计算题

1.13.1　抽象行列式的计算

先来给大家解释一下什么叫抽象行列式的计算。所谓抽象行列式的计算，指的是题中并没有告诉我们某行列式每行每列的具体数值是多少，但是却让我们计算该行列式的值，这种题就叫做抽象行列式的计算题。

那么，我们该如何去计算抽象行列式呢？可以利用以下七个公式去计算（这七个公式一定要背下来），其中矩阵A、矩阵B均为 n 阶方阵。

公式①　$AA^{-1}=A^{-1}A=E$　**（此公式其实就是可逆矩阵的定义式）**

公式②　$|A|\times|A^{-1}|=1$

公式③　$|A^*|=|A|^{n-1}$

公式④　$(kA)^*=k^{n-1}\times A^*$（其中k为任意常数）

$|kA|=k^n\times|A|$（其中k为任意常数）

公式⑤　$|AB|=|BA|=|A|\times|B|=|B|\times|A|$

公式⑥　$AA^*=A^*A=|A|\times E$

公式⑦　$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

下面来看相应的考研题。

考研题 1.6 设 A 为 3×3 矩阵，B 为 4×4 矩阵，且 $|A|=1$、$|B|=-2$，则 $||B|\cdot A|=?$

$$
\begin{aligned}
&||B|\cdot A| \quad \text{（直接把}|B|\text{换为题中所给的-2）}\\
&=|-2\cdot A| \quad \text{（根据刚刚讲的七个公式的公式④）}\\
\text{解：}&=(-2)^3\cdot|A| \quad \text{（直接把}|A|\text{换为题中给所的1）}\\
&=-8\cdot 1\\
&=-8
\end{aligned}
$$

考研题 1.7 设 A 是三阶方阵且 $|A|=2$，则 $|-|A|\cdot A|=?$

$$
\begin{aligned}
&|-|A|\cdot A| \quad \text{（直接把}|A|\text{换为题中所给的2）}\\
&=|-2\cdot A| \quad \text{（根据刚刚讲的七个公式的公式④）}\\
\text{解：}&=(-2)^3\cdot|A| \quad \text{（直接把}|A|\text{换为题中所给的2）}\\
&=-8\cdot 2\\
&=-16
\end{aligned}
$$

考研题 1.8 设 A 为三阶方阵，A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵，$|A|=\frac{1}{8}$，计算 $\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|$。

解：根据本章的“第九车砖——方阵、对角矩阵、单位矩阵、逆矩阵”可知：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，

则 $A^*=A^{-1}|A|=\frac{1}{8}A^{-1}$

所以：

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|\\
&=\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8\times\frac{1}{8}\times A^{-1}\right|\\
&=\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-A^{-1}\right|
\end{aligned}
$$

（注意：接下来的等号用到了下一章的公式 $(AB)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$，

即 $\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}=A^{-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=A^{-1}\times 3=3A^{-1}$）

$=\left|3A^{-1}-A^{-1}\right|$

$=\left|2A^{-1}\right|$（根据刚刚讲完的七个公式的公式④）

$=2^3\left|A^{-1}\right|$（根据刚刚讲完的七个公式的公式②）

$=8\times\dfrac{1}{|A|}$（直接把$|A|$换为题中所给的$\dfrac{1}{8}$）

$=8\times\dfrac{1}{\frac{1}{8}}$

$=64$

1.13.2　具体行列式的计算

先来给大家解释一下什么叫具体行列式的计算。所谓具体行列式，指的是题中了告诉了我们某行列式每行每列的数值是多少，让我们计算该行列式的值，这种题就叫做具体行列式的计算题。

“具体行列式的计算”又分为两种题型。

第一种题型：给的是一个不带省略号的行列式。

例如：计算行列式$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}$

第二种题型：给的是一个带有省略号的行列式。

例如：计算行列式$\begin{vmatrix}1&2&2&\cdots&2\\2&2&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\2&2&2&\cdots&n\end{vmatrix}$

那么接下来，就开始拆解这两种不同的出题形式并分别介绍各自的解题方法。

1.第一种题型

计算不带省略号的行列式（共六种方法）

- **方法 1**

利用之前讲过的“第三车砖”+“第四车砖”。

考研题 1.9 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{9}{2} & -\frac{2}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix}$$

解：对原行列式的第四行使用“第四车砖”中的性质 3，得：

$$\frac{1}{7}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{9}{2} & -\frac{2}{5} & \frac{5}{2} \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

再对现在的这个行列式的第一、二、三、四列分别使用“第四车砖”中的性质 3，得：

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 9 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

然后利用“第四车砖”中的性质 5，第一行×（−3）后加到第二行，得：

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

然后利用“第三车砖”中所讲的降阶法，选取第二行（因为第二行中的“0”比较多），得：

$$\frac{13}{420}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

然后利用“第三车砖”中所讲的三阶行列式计算公式，得：$-\frac{13}{14}$

- **方法 2**

利用范德蒙行列式。

注意：“范德蒙行列式”是解决不带省略号行列式的计算题的第二种方法，但是并不是所有不带省略号的题都可以用范德蒙行列式来做，这“范德蒙行列式”只能用于特定的题型中。下面介绍“范德蒙行列式”。

范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & \cdots & a_n^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=(a_2-a_1)\times(a_3-a_2)(a_3-a_1)\times(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)\times\cdots\times(a_n-a_{n-1})(a_n-a_{n-2})\cdots(a_n-a_1)$$

考研题 1.10　计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$

$=(3-2)\times(4-3)\times(4-2)$

$=2$

考研题 1.11　计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 16 & 9 & 25 \\ 8 & 64 & 27 & 125 \end{vmatrix}$$

解：$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\2 & 4 & 3 & 5\\4 & 16 & 9 & 25\\8 & 64 & 27 & 125\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\2 & 4 & 3 & 5\\2^2 & 4^2 & 3^2 & 5^2\\2^3 & 4^3 & 3^3 & 5^3\end{vmatrix}$

$$=(4-2)\times(3-4)\times(3-2)\times(5-3)\times(5-4)\times(5-2)$$
$$=2\times(-1)\times1\times2\times1\times3$$
$$=-12$$

- 方法 3

利用定义法。

所谓利用定义法，指的就是利用行列式的定义来计算，那么我们首先应该了解行列式的定义是什么，才能用定义去计算。在本章前面，我只是告诉了大家行列式长什么样，但没有告诉大家行列式的定义是什么。并非是我忘记了，而是我要留到现在介绍，现在介绍行列式定义的好处是：介绍完之后就可以马上趁热打铁地介绍利用定义来计算行列式。

要想知道行列式的定义，我们首先来看一下逆序数的定义。

逆序数：在一个由 n 个元素所组成的排列中，如果一个较大的数排在一个较小的数的左侧，我们就称这两个数构成一个逆序。一个排列中逆序的总数，称为这个排列的逆序数。

例. 排列：5　4　2　1　3　的逆序数是多少？

解：首先我们从 5 开始往后看。5-4，是一个逆序；5-2，是一个逆序；5-1，是一个逆序；5-3，是一个逆序。所以从 5 出发一共有四个逆序。

我们再从 4 开始往后看。4-2，是一个逆序；4-1，是一个逆序；4-3，是一个逆序。所以从 4 出发一共有三个逆序。

接着，我们从 2 开始往后看。2-1，是一个逆序；2-3，不是逆序，因为 2 比 3 小。所以从 2 出发一共有一个逆序。

最后，我们从 1 开始往后看。1-3，不是逆序，因为 1 比 3 小。所以从 1 出发没有逆序。

所以，排列：5　4　2　1　3 的逆序数为 4+3+1+0=8。

知道了逆序数的概念后，我们来看 n 阶行列式的定义：

由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 组成的记号 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式。

D 的值是所有取自不同列也不同行的 n 个元素乘积的代数和，但是各项的前面都要乘一个

$(-1)^{\text{行标的逆序数+列标的逆序数}}$。

也许大家看了以上这段话后，仍然不太理解行列式的定义，没有关系，我带着你们用行列式的定义来推导一下二阶行列式的计算公式。相信在我推导完之后，你对行列式的定义会彻底明白，下面开始推导。

我们由“第三车砖”中的“两行两列行列式的计算”可知，二阶行列式的计算公式为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，当时我说记住就行了，事实也的确如此。不过现在，为了让你们明白行列式的定义，我要利用行列式的定义来推导一下此公式。

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，这是二阶的行列式对吧。根据定义，让这四个数中不同行也不同列的数相乘，一共有两项，即 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$。然后，分别确定这两项的正负号。

先确定 $a_{11}a_{22}$ 的正负号。确定方法如下：

$a_{11} \quad a_{22}$

行标的排列为：**1　2**，逆序数为 **0**。

列标的排列为：**1　2**，逆序数为 **0**。

$(-1)^{0+0} a_{11}a_{22} = a_{11}a_{22}$，符号确定完了，由于 $(-1)^{0+0} = 1$，所以取“＋”号。

注意：行标的排列之所以是 **1　2**，是因为 a_{11} 处于行列式中的第一行，a_{22} 处于行列式中的第二行。列标同理。

这时，有的同学可能会提出质疑，　$a_{11}a_{22}$ 和 $a_{22}a_{11}$ 是一回事，可要是按照 $a_{22}a_{11}$ 算逆序数，结果会不会有变化？那么我们来看一下：

$a_{22} \quad a_{11}$

行标的排列为：**2　1**，逆序数为 **1**。

列标的排列为：**2　1**，逆序数为 **1**。

$(-1)^{1+1} a_{22}a_{11} = a_{22}a_{11}$，看见了吧，一样，符号还是正的。

好，接下来我们确定 $a_{12}a_{21}$ 的符号。确定方法如下：

$a_{12}\quad a_{21}$

行标的排列为：**1　2**，逆序数为 **0**。

列标的排列为：**2　1**，逆序数为 **1**。

$(-1)^{0+1}a_{12}a_{21}=-a_{12}a_{21}$，符号确定完了，由于 $(-1)^{0+1}=-1$，所以取“－”号。

最后把这两项相加，$a_{11}a_{22}+(-a_{12}a_{21})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，看见了吧，现在我们已经用定义推导出了二阶行列式的计算公式了。相信现在你已经掌握行列式的定义了，但是为了检测你是否真的掌握了行列式的定义，请你自己用行列式的定义推导一下三阶行列式的计算公式。尽量自己推导，实在不会，再看我下面的推导过程。

三阶行列式的计算公式推导过程：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

首先找出所有不同行不同列的数相乘：

$a_{11}a_{22}a_{33}$、$a_{12}a_{21}a_{33}$、$a_{13}a_{22}a_{31}$、$a_{11}a_{23}a_{32}$、$a_{12}a_{23}a_{31}$、$a_{13}a_{21}a_{32}$，一共有六项。然后确定每项的正负号，确定方法如下：

$a_{11}a_{22}a_{33}$

行标：**1　2　3**。逆序数为 **0**。

列标：**1　2　3**。逆序数为 **0**。

所以 $(-1)^{0+0}=1$。

$a_{12}a_{21}a_{33}$

行标：**1　2　3**。逆序数为 **0**。

列标：**2　1　3**。逆序数为 **1**。

所以 $(-1)^{0+1}=-1$。

$a_{13}a_{22}a_{31}$

行标：1　2　3。逆序数为 0。

列标：3　2　1。逆序数为 3。

所以 $(-1)^{0+3}=-1$。

$a_{11}a_{23}a_{32}$

行标：1　2　3。逆序数为 0。

列标：1　3　2。逆序数为 1。

所以 $(-1)^{0+1}=-1$。

$a_{12}a_{23}a_{31}$

行标：1　2　3。逆序数为 0。

列标：2　3　1。逆序数为 2。

所以 $(-1)^{0+2}=1$。

$a_{13}a_{21}a_{32}$

行标：1　2　3。逆序数为 0。

列标：3　1　2。逆序数为 2。

所以 $(-1)^{0+2}=1$。

所以：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

相信大家已经了解行列式的定义了，下面我们来看几道考研题。

考研题 1.12 在五阶行列式中，项 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应取？

解：此题虽然没有给出一个完整的五行五列的行列式让我们计算，但是此题也要用行列式的定义来做，下面我把此题阐述得更清楚一些。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \boxed{a_{25}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{a_{43}} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & \boxed{a_{54}} & a_{55} \end{vmatrix}$$

这是一个五阶行列式，如果直接计算这个行列式的话，会十分麻烦，因为其不同行也不同列的数组成的乘积项共有 $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$ 项，此题要的就是这 120 项的其中一项“$a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$”的符号。

我们现在开始正式做这道题。

行标的排列为：1　3　5　4　2，逆序数为 4。

列标的排列为：2　1　4　3　5，逆序数为 2。

$$(-1)^{4+2} = 1$$

所以 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 的符号应该取正。

这道题做完了。这种题一般的做法是首先将给的项的内部换一下顺序，把行标换为从小到大的顺序，这样就只算列标的逆序数即可，很简单。例如，此题可将 $a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$ 变为 $a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$，行标按从小到大的顺序排列，这样的话行标的逆序数一定为 0，就不用算了，只算列标的逆序数，然后符号为 $(-1)^{\text{列标的逆序数}}$。

考研题 1.13 四阶行列式中，带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为？

解：由行列式的定义，我们知道在四阶行列式中包含 a_{23} 和 a_{31} 的项有两项，分别为

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$。题中要求符号是负的，我们来看一下。

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 2　3　1　4，逆序数为 2。

$(-1)^{0+2}=1$

所以不是 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 这项，所以一定是 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$。

考研题 1.14 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$$

解：定义法对于这种含 0 比较多的行列式计算题尤为适用，原因就是很多项都可以消掉，明白了吧。那么此题，一看 0 比较多，于是想到用定义法。这个行列式有四行四列，$4!=4\times3\times2\times1=24$，说明不同行也不同列的乘积共有 24 项，但由于其中有很多 0，所以根本不用把这 24 项都写出来。通过用眼睛观察，很容易就会发现，在这 24 个乘积项中不为 0 的项其实一共只有四项，它们是 $a_1a_2a_3a_4, a_1b_2b_3a_4, b_1b_2b_3b_4, b_1a_2a_3b_4$。接下来要做的就是分别确定这四项中每一项的正负号。

$a_1a_2a_3a_4$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 1　2　3　4，逆序数为 0。

$(-1)^{0+0}=1$，所以此项符号为正。

$a_1b_2b_3a_4$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 1　3　2　4，逆序数为 1。

$(-1)^{0+1}=-1$，所以此项符号为负。

$b_1b_2b_3b_4$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 4　3　2　1，逆序数为 6。

$(-1)^{0+6}=1$，所以此项符号为正。

$b_1a_2a_3b_4$

行标 1　2　3　4，逆序数为 0。

列标 4　2　3　1，逆序数为 5。

$(-1)^{0+5}=-1$，所以此项符号为负。

综上，此题答案为 $a_1a_2a_3a_4-a_1b_2b_3a_4+b_1b_2b_3b_4-b_1a_2a_3b_4$。

- 方法 4

利用分块行列式。

我先来说一下分块行列式的两个公式：

① $\begin{vmatrix} A_{n\times n} & O \\ O & B_{m\times m} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{n\times n} & C \\ O & B_{m\times m} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{n\times n} & O \\ C & B_{m\times m} \end{vmatrix}=|A||B|$

② $\begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} C & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$

考研题 1.15 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{vmatrix}$$

解：设矩阵 A 为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$，矩阵 B 为 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$，矩阵 C 为 $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$，矩阵 O 为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

（注意：只有全 0 的矩阵才能设为 O。）

则：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A||C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$$
$$= (1\times6-5\times2)\times(9\times12-10\times11)$$
$$= -4\times(-2)$$
$$= 8$$

考研题 1.16　计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解：设矩阵 A 为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，矩阵 B 为 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$，矩阵 C 为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 O 为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

则：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = |A||C|$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2\times1$$
$$= -2$$

注意：无论是几阶的单位矩阵 E，其所对应的行列式的值都是 1。

- **方法 5**

观察一次因式法。

考研题 1.17　计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

解：观察一下该行列式的第一、二行。第一行为 1，1，2，3；第二行为 1，$2-x^2$，2，3。当 $2-x^2=1$ 时，该行列式的前两行就一样了。也就是说，当 $2-x^2=1$ 即 $x=\pm1$ 时，该行列式的值为 0。所以我们可以得出如下结论。

设：

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}=\boxed{}$$

那么 $\boxed{}$ 中一定会含有 $(x-1)(x+1)$，对吧。

我们再来观察一下该行列式的第三、四行。第三行为 2，3，1，5；第四行为 2，3，1，$9-x^2$。当 $9-x^2=5$ 时，该行列式的第三行和第四行就一样了。也就是说，当 $9-x^2=5$ 时即 $x=\pm2$ 时，该行列式的值为 0。再结合刚才提到的"当 $x=\pm1$ 时，该行列式的值为 0"，我们可以知道 $\boxed{}$ 中一定会含有 $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$。由于 D_4 中关于 x 的最高次数为 4，所以：

$D_4=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$　其中 k 为待确定的常数。

① 根据定义法可知，D_4 中含 x^4 的项为：

$1\times(2-x^2)\times1\times(9-x^2)-2\times(2-x^2)\times2\times(9-x^2)$

② 比较①、②两式中 x^4 的系数，得 $k=-3$，

故：$D_4=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

- 方法 6

当所给行列式的每行所有数字之和均相等时：

第一步，除了第一列以外的所有列都乘以 **1** 加到第一列，然后将第一列提出到行列式之外，使得新行列式的第一列都变成 **1**；

第二步，把第一行乘以 **-1** 加到除了第一行以外的各行上，此时得到的一定是一个上/

下三角行列式；

第三步，把对角线上的数相乘即可。

注意：

- **只有**每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，**才**能用此方法去计算，其他情况都不能用；
- **并不是说只要**是每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，**就**能用此方法去计算，但是我可以这么告诉大家：如果我们把范围规定在**考研卷子**上的话，那么从历年真题来看，一旦**出现每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，就可以用我所说的方法去计算。**

考研题 1.18　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

解：此行列式中每行所有元素之和均相等（每行所有元素之和都是 $3b+a$），所以可以用方法 6 来进行计算。

$$D=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3b+a & b & b & b \\ 3b+a & a & b & b \\ 3b+a & b & a & b \\ 3b+a & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(3b+a)\times\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(3b+a)\times\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$=(3b+a)\times(a-b)^3$$

2.第二种题型

计算带有省略号的行列式（共七种方法）。

- 方法 1

利用范德蒙行列式（与不带省略号的行列式的计算方法中的方法 **2** 一样）。

考研题 1.19 计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解：原行列式为

$$\begin{aligned} &(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-2})\cdots(x_n - x_1) \\ &\qquad (x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-3})\cdots(x_{n-1} - x_1) \\ &\qquad \cdots \\ &\qquad \cdots(x_2 - x_1) \\ &= \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j) \end{aligned}$$

注：$\prod$ 的意思是连乘，它只是一个数学符号而已，正如 $\sum$ 的意思是连加。

- 方法 2

利用定义法（与不带省略号的行列式的计算方法中的方法 **3** 一样）。

考研题 1.20 计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}$$

解：以上这个行列式共有 1998 行 1998 列，属于带有省略号的行列式。我在讲定义法

时说过，定义法用于计算 0 比较多的行列式，而此题所给的行列式明显有很多 0，因此此题我们采用定义法来计算。

在此行列式中，由不同行也不同列的数组成的且不为 0 的乘积项只有一项，它是

$1\times 2\times 3\times \cdots 1998=1998!$

接下来我们要做的就是确定这一项的正负号。

行标：1　2　3　4　……　1998

所以行标的逆序数为 0。

列标：1997　1996　1995　……　1　1998

所以列标逆序数为 $\left(1998-2\right)+\left(1998-3\right)+\cdots+1=\dfrac{\left(1998-1\right)\left(1998-2\right)}{2}$

由于 $\left(-1\right)^{0+\frac{(1998-1)(1998-2)}{2}}=\left(-1\right)^{\frac{1997\times 1996}{2}}$

所以此题的答案为 $\left(-1\right)^{\frac{1997\times 1996}{2}}1998$。

下面的这道计算题请大家用定义法来计算，我只给出答案，计算过程请你仿照上例自己完成。

考研题 1.21　计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

本题答案为：$a^n+\left(-1\right)^{n-1}b$

- 方法 3

当所给行列式的每行所有数字之和均相等时：

第一步，除了第一列以外的所有列都乘以 **1** 加到第一列，然后将第一列提出到行列式之外，使得新行列式的第一列都变成 **1**；

第二步，把第一行乘以**-1** 加到除了第一行以外的各行上，此时得到的一定是一个上/下三角行列式；

第三步，把对角线上的数相乘即可（与不带省略号的行列式的计算方法中方法 **6** 一致）。

注意：

- **只有**每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，**才**能用此方法去计算，其他情况都不能用；
- **并不是说只要**是每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，**就**能用此方法去计算。但是我可以这么告诉大家：如果我们把范围规定在**考研卷子上**的话，那么从历年真题来看，**一旦出现每行（或每列）所有元素之和均相等的行列式，就可以用我所说的方法去计算。**

考研题 1.22 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解：此行列式中每行所有元素之和均相等（每行所有元素之和都是 $a+(n-1)b$），所以此行列式可以用方法 3 来进行计算。好，那么现在我们完全按照方法 3 所讲的方法来计算这道题，不要觉得死板，这种题就是生搬硬套。

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\underbrace{\begin{vmatrix}1 & b & b & \cdots & b\\0 & a-b & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & a-b & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a-b\end{vmatrix}}_{\text{这是上三角行列式，因为对角线下方都是0}}$$

$$=\left[a+(n-1)b\right]\times(a-b)^{n-1}$$

到现在为止，带有省略号的行列式的计算方法（共七种方法）中方法 1、方法 2 以及方法 3 都讲完了。我们可以看到，这三种方法其实在不带省略号的行列式的计算方法中也有。但下面要讲的四种方法则是带有省略号的行列式的专用计算方法了。

- **方法 4**

某行（或某列）加上其余各行（或各列）的一定倍数。

注意：此方法适用于施行完这种变换后，行列式立即呈上（或下）三角行列式的情形。

考研题 1.23 计算：

$$D_n=\begin{vmatrix}a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\1 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1}\end{vmatrix}\text{，其中 } a_1\cdots a_{n-1}\neq 0$$

解：第一列$+\left(-\dfrac{1}{a_1}\right)\times$第二列$+\left(-\dfrac{1}{a_2}\right)\times$第三列$+\cdots+\left(-\dfrac{1}{a_{n-1}}\right)\times$第 n 列

$$D_n=\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1\\0 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\end{vmatrix}$$

看见了吧，这时的行列式已经是上三角行列式了。

$$=(a_1a_2\cdots a_{n-1})\left(a_0-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{a_i}\right)$$

- **方法 5**

各行（或各列）加减同一行（或同一列）的一定倍数。

注意：方法 5 与方法 4 正好相反。方法 4 是把所有行（列）的一定倍数都加到某行（列）上去，而方法 5 则是所有行（列）都加减某行（列）的一定倍数。

方法 5 适用于施行完这种变换后，行列式立即或再经过其他方法可以呈上（或下）三角行列式的情形。也就是说，用完方法 5 不一定立即（但也有可能立即）呈现上/下三角行列式（这与方法 4 不同，方法 4 是用完后行列式一定立即就会呈上/下三角行列式）。

因此，方法 5 的使用是七种方法里最难判别的一种。为什么这么说呢？其实方法 4 和方法 5 何时使用都属于比较难判别的，因为它们用于的都是：施行完此变换后行，列式变为什么样。

我拿方法 4 来举例。当你判断一道计算行列式的题到底用不用方法 4 来计算时，你需要把这道题假设用了方法 4 之后的样子想象出来，如果该行列式用完方法 4 后，能立即变为上/下三角行列式，则说明应该用方法 4 去计算——等于说你需要倒着去想。而一道行列式的计算题使用不使用方法 5 去计算就更加难判别，因为你可能需要往后想两步而不是一步。想想如果这步用了方法 5，下一步再用某种方法后能不能将原行列式变为上/下三角行列式。如果能，则这步就用方法 5（当然了，也有可能用完方法 5 后的行列式立即变为上/下三角行列式。如果这样的话，就和方法 4 一样，往后想一步就可以了）。

但是，我所谓的“难”是对初学者而言。熟能生出百巧来，当你做题做多了，熟练了之后，会发现这实际上很容易。

考研题 1.24 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解：利用方法 5，第二列乘以（-1）后加到各列，得：

$$D_n = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

再用本章的“第三车砖”中的降阶法（选取第一列，因为第一列只有一个非 0 的数，

因此选择第一列的话，降阶时会非常方便）。

$$D_n=(-1)\times(-1)^{1+1}\times\underbrace{\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0\\2&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\2&0&\cdots&n-2\end{vmatrix}}_{\text{这是一个下三角行列式}}$$
$$=-2(n-2)!$$

- 方法 6

加边法。

加边法的公式是：

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&*&*&\cdots&*\\0&a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

其中，*处的值可以任意添加，因此，你要仔细观察行列式，添加适当的数。

考研题 1.25　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2&x_1x_2&\dots&x_1x_n\\x_2x_1&1+x_2^2&\dots&x_2x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_nx_1&x_nx_2&\dots&1+x_n^2\end{vmatrix}$$

解：采用加边法。将 D_n 加一行一列构成 D_{n+1}。

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1^2&x_1x_2&\dots&x_1x_n\\x_2x_1&1+x_2^2&\dots&x_2x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\x_nx_1&x_nx_2&\dots&1+x_n^2\end{vmatrix}=D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\dots&x_n\\0&1+x_1^2&x_1x_2&\dots&x_1x_n\\0&x_2x_1&1+x_2^2&&x_2x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&x_nx_1&x_nx_2&\dots&1+x_n^2\end{vmatrix}$$

上式的右侧就是使用了方法 6（加边法）所得到的新行列式，然后，使用方法 5，将

第 1 行乘$-x_i$后加到第 i+1 行（i=2,3⋯,n+1），得：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & ... & x_n \\ -x_1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -x_2 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -x_n & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}$$

最后，使用方法 4，将 i 列乘x_{i-1}（i=2,3,⋯,n+1）加到第一列，得：

$$\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & x_1 & ... & x_n \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix}$$（这是一个上三角行列式）

$$=1+\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

这是考研中难度较大的一道计算题。通过这道题我们应该了解到计算行列式的这些方法并不是孤立的。换言之，有可能在同一道题中用到不止一种方法。

- 方法 7

递推公式法。

若行列式同时满足以下两个条件，则用此方法求解：

条件（**1**）：在行列式的任意一行和任意一列中，最多只有三个非 **0** 的数。

条件（**2**）：去掉行列式的最后一行和最后一列后，行列式的形式保持不变，只不过是少了一行一列而已。

下面我结合一道考研题来给大家讲解递推公式法。

考研题 1.26 计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}_{n\times n}$$

解：此行列式同时满足上述的条件（1）和条件（2），所以我们使用方法 7 来计算此行列式。记住，只要同时满足条件（1）和条件（2）的行列式，一般都可以用方法 7 来计算。

说了半天，只说了方法 7 的名字叫做递推公式法，那么到底怎么使用呢？现在就来详细说一下方法 7 的使用方法。

递推公式法有四个步骤：

第 1 步：将 D_n 化为 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$，方法是先按第一列展开（也就是选取第一列进行降阶），然后再将展开后得到的第二个行列式按第一行展开，就可以得到 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ 了（注意：我并不是指这道题，而是只要能用方法 7 的题，第一步都是这样做）。

此题的第一步为：

$$D_n \overset{\text{按第一列}}{\underset{\text{展开}}{=}} (1\text{-}a)\times\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}_{(\mathrm{n}-1)\times(\mathrm{n}-1)}$$

$$+(-1)\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=(1\text{-}a)\times D_{n-1}+1\times\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$\overset{\text{按第一行}}{\underset{\text{展开}}{=}}(1\text{-}a)\times D_{n-1}+1\times a\times\begin{vmatrix}1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a\end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$=(1\text{-}a)\ D_{n-1}+aD_{n-2}$

此题的第 1 步做完了，原行列式 D_n 已经被成功地改写为了：$D_n=pD_{n-1}+qD_{n-2}$，其中 p=1-a，q=a 。（注意：不是说任何一个行列式都可以当成 D_{n-1} 和 D_{n-2} 的。D_{n-1} 指的是形式与 D_n 相同，只是比 D_n 少一行一列；D_{n-2} 指的是形式与 D_n 相同，只是比 D_n 少两行两列。）

第 2 步：解方程 $\lambda^2-p\lambda-q=0$，解出 λ_1 和 λ_2。

此题的第 2 步为：由于 p=1-a,q=a

所以：$\lambda^2-p\lambda-q=0$

$\Rightarrow\lambda^2-(1-a)\lambda-a=0$

解得：$\lambda_1=1,\lambda_2=-a$

第 3 步：分类讨论。

若 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则把 D_n 写为 $D_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$

若 $\lambda_1=\lambda_2$，则把 D_n 写为 $D_n=c_1\lambda_1^n+c_2n\lambda_2^n$

此题的第 3 步为：由于 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-a$，$\lambda_1\neq\lambda_2$

所以 $D_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n=c_1+c_2(-a)^n$

第 4 步：取 n=1，n=2 代入到 D_n 中，解出 c_1、c_2 后，将 c_1、c_2 代入到第 3 步的式子中，即得最后答案。

此题的第 4 步为：由于刚才在第 3 步中已经把 D_n 写为了 $D_n=c_1+c_2(-a)^n$，

所以当 n=1 时，$D_1=c_1+c_2\times(-a)$　　　　（1）

当 n=2 时，$D_2=c_1+c_2\times(-a)^2=c_1+c_2\times a^2$　　　　（2）

（1）（2）两式联立，即可解出 c_1 和 c_2。即：

$$\begin{cases} D_1=c_1+c_2\times(-a) \\ D_2=c_1+c_2\times a^2 \end{cases}$$

D_1,D_2 是什么？

D_1 是行列式的第一行第一个数：$1-a$

D_2 是行列式中第一行的第一、二个数，第二行的第一、二个数所组成的行列式：

$$\begin{vmatrix} 1-a & a \\ -1 & 1-a \end{vmatrix}=(1-a)^2+a$$

所以：

$$\begin{cases} 1-a=c_1+c_2\times(-a) \\ (1-a)^2+a=c_1+a^2c_2 \end{cases}$$

解得：

$$c_1=\frac{1}{1+a}\ c_2=\frac{a}{1+a}$$

把 c_1、c_2 代入到第3步的式子中得：

$$D_n = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} \times (-a)^n$$

1.14 房间 104——贯穿考研试题的思维定势

这是第 **1** 章的最后一个房间，这个房间我要告诉大家一个好消息，一个万能公式。那就是：一旦考研题的所给条件中给了一个矩阵，该矩阵是用前面“第十车砖”中所讲的矩阵的列向量表示法给出的，并且每一列又都是两个或多个列向量相加的形式，则不管问题问的是什么（计算题也好、证明题也罢），立刻将此矩阵化为两个矩阵相乘的形式，一定可以求出所问的问题。

例. 一道题的条件中给了矩阵 $A=(\vec{a}+2\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\gamma},\vec{a}+3\vec{\gamma})$，则不管问题是什么，立刻将此矩阵 A 写为：

$$A=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})\times\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&1&3\end{pmatrix}$$

为什么第一列是 1，2，0，那是因为 A 的第一列是 $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+0\vec{\gamma}$。第二、三列同理。

考研题 1.27 证明：

$$|A|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\xi},\vec{\xi}+\vec{\eta},\vec{\eta}+\vec{\alpha}\right|=0$$

解：

由题意知矩阵 $A=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\beta}+\vec{\xi},\vec{\xi}+\vec{\eta},\vec{\eta}+\vec{\alpha}\right)$，

根据房间 104 的诀窍，立刻将矩阵 A 化为：

$$A=(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix} \qquad ①式$$

从这以后，就不是房间 104 要解决的问题了，房间 104 只管到这里，然后根据问题，

将①式的等于号两侧同时取行列式，则有：

$$|A|=\left|(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right|$$

矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$有四行四列，而矩阵$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})$也有四行四列。这是为什么呢？听我解释。矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$有四行四列这是显然的。而矩阵$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})$也有四行四列是为什么呢？有四列是显然的，有四行是因为：如果它不是四行，那么A就不会是方阵，若A不是方阵，就不可能存在$|A|$，因为行列式行数和列数一定是相等的。而题中让证$|A|=0$，暗示$|A|$存在，说明A是方阵，故$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})$有四行。所以$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$、$(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})$这两个矩阵都是四阶方阵。好，此时就使用房间 103 中的抽象行列式的计算方法中的公式⑤，得：

$$|A|=\left|(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta})\times\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\right|=\left|\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\xi},\vec{\eta}\right|\times\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

通过计算，发现$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=0$，而 0 乘以任何数都得 0。

所以，$|A|=0$，证毕。

1.15 小 结

线性代数大楼的第一层终于盖完了，看：



在这一章中，我们讲了行列式的行数和列数是相等的，并且行列式是用双竖线来表示的，其本质是一个数。

那么这个数该如何计算呢？我们对于特殊的行列式采用特殊的方法进行计算；对于一般的二阶和三阶行列式，我们直接利用公式对其进行计算；对于一般的大于三阶的行列式，我们则采用降阶法。当然，利用行列式的五条性质可以大大降低计算量。

之后我给大家讲了矩阵的概念以及几种特殊的矩阵，比如方阵、对角矩阵、单位矩阵等等，紧接着讲了矩阵的运算、转置，后来又引出了逆矩阵的概念。

最后，我将难度提高到了考研的要求，讲了关于代数余子式的三句话，克拉默法则的推论，考研中涉及到的行列式计算以及一个思维定势。

1.16 练 习 题

1. 选择题

（1）设$|A_{n\times n}|=a$，$|B_{n\times n}|=b$，则$\begin{vmatrix} O & 3B \\ -A & O \end{vmatrix}=$__________。

（A）-3ab　　（B）$(-1)^n 3^m ab$　（C）$(-1)^{n(m+1)} 3^m ab$　（D）$(-1)^{m\times n} 3^m ab$

解：根据房间 103 中所讲的具体行列式的计算方法中的不带省略号的行列式的计算方法（共六种方法）中的方法 4（利用分块矩阵），可以得到如下式子：

$$\begin{vmatrix} O & 3B \\ -A & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \times |-A| \times |3B|$$

看到这里，你如果说话办事比较喜欢逻辑条理清楚，那么可能你会觉得奇怪。你可能会认为这道题是一道抽象行列式的计算题而不是具体行列式的计算题，所以你可能会不理解这道题怎么用上具体行列式的计算方法了呢？

我现在来回答这个问题：此题既具有抽象行列式的计算题的特征（矩阵 A、矩阵 B 中的数都没有具体给出），又有具体行列式中不带省略号的行列式的计算题的特征（所有让计算的行列式以分块的形式具体给出了，且行列式中不含省略号）。因此，此题肯定是既会用到抽象行列式的计算方法，又会用到具体行列式的计算方法中的不带省略号的行列式的计算方法。

这不，刚才用的是具体行列式的计算方法中的不带省略号的行列式的计算方法（共六种方法）中的方法 4（利用分块矩阵），接下来马上就要用到抽象行列式的计算方法了。我们继续来看：

$$(-1)^{mn} \times |-A| \times |3B|$$

$$= (-1)^{mn} \times (-1)^{n} \times |A| \times 3^{m} \times |B|$$

$$= (-1)^{mn+n} \times 3^{m} \times a \times b$$

$$= (-1)^{n(m+1)} 3^{m} ab$$

答案：（C）。

（2）当 $k \neq 1$ 时，下列哪个等式成立？

（A）$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$

（B）$\begin{vmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$

（C）$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

（D）$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

解：

（A）：根据第四车砖中所讲的性质 4，一个行列式可以分解为两个行列式之和或之差的形式。但是，分解后的两个行列式必须只有一行或一列不同。也就是说，行列式虽然可以分解，但是只能分解一行或一列，而不能分解整个行列式。所以（A）选项错误，但如果把（A）选项中所有出现的双竖线全改为括号，则根据第七车砖，（A）选项正确。

（B）：错误。错误原因同（A）。

（C）：根据第四车砖中的性质 3，（C）选项的等式右侧应该是 $k^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，

然而实际上（C）选项的等式右侧并不是这样，所以（C）选项错误。

（D）：根据第四车砖中的性质 3：

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

所以（D）选项正确。

答案：（D）。

（3）设 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m$，则 $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3-2a_1 & b_3-2b_1 & c_3-2c_1 \end{vmatrix} =$ ________。

（A）-8m　　（B）m　　（C）-3m　　（D）4m

解：根据第四车砖中的性质 4：

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3-2a_1 & b_3-2b_1 & c_3-2c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \end{vmatrix}$$

根据第四车砖中的性质 3 的推论

$$=-3\begin{vmatrix}a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}-0$$

$=-3\text{m}$

答案：（C）。

（4）A,B,C,D 都是 n 阶矩阵，$a_i,b_i,c_i,d_i(i=1,2)$ 是数，则下列各式中正确的是___：

（A）$\begin{vmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ c_1+c_2 & d_1+d_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}$

（B）$\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=|A|^2-|B|^2$

（C）$\begin{vmatrix}O & A\\ B & C\end{vmatrix}=-|A|\times|B|$

（D）$\begin{vmatrix}a_1 & 0 & 0 & b_1\\ 0 & a_2 & b_2 & 0\\ 0 & c_1 & d_1 & 0\\ c_2 & 0 & 0 & d_2\end{vmatrix}$

解：

（A）选项错误。错误原因同选择题第 1 题的（A）。

（B）选项错误。题目中说 A、B 都是 n 阶矩阵，不妨设 A、B 都是二阶矩阵。

设 $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

则：

$$\begin{vmatrix}A & B\\ B & A\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O & B\\ B & O\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}|B|\times|B|=1\times1\times1=1$$

而：

$$|A|^2-|B|^2=0^2-1^2=-1$$

故$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \neq |A|^2 - |B|^2$

故（B）错误。顺便说一句，（B）选项只有在A、B都为一阶矩阵（即A、B都为一个数）时才正确。

（C）选项错误。根据房间 103 相关讲解，

$\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} |A| \times |B|$，而$(-1)^{n^2}$不一定是$-1$，所以（C）选项错误。

（D）选项正确。

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \end{vmatrix}$$

根据第四车砖中的性质 2，互换第二、四行，行列式变号。

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ c_2 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 & 0 \end{vmatrix}$$

根据第四车砖中的性质 2，互换第二、四列，行列式变号。

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 & c_1 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

根据第四车砖中的性质 2，互换第三、四行，行列式变号。

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & d_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

根据第四车砖中的性质 2，互换第三、四列，行列式变号。

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & c_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

根据房间 103 中所讲的不带省略号的行列式的计算方法中的方法 4（利用分块矩阵），可得：

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix}$$

故（D）正确。

答案：（D）。

2.填空题

已知方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解，则 λ ________。

解：该方程组是一个齐次方程组，由于题中说明此方程组只有零解，根据房间 102 中所讲的四个充分必要条件中的第二个，得：

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

根据第三车砖中所讲的三阶行列式的计算公式，得：

$$\lambda\times\lambda\times 1+1\times 1\times 1+1\times 1\times 1-1\times 1\times\lambda-\lambda\times 1\times 1-1\times 1\times 1\neq 0$$

$$\lambda^2+1+1-\lambda-\lambda-1\neq 0$$

$$\lambda^2-2\lambda+1\neq 0$$

$$(\lambda-1)^2\neq 0$$

解得：$\lambda\neq 1$

答案：$\lambda\neq 1$。

3.计算和证明题

设 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3$ 是 4×1 矩阵（即它们都是四维列向量），已知 $|A|=\left|\vec{\alpha},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3\right|=4$，$|B|=\left|\vec{\beta},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3\right|=-2$，计算行列式 $|A+B|$。

解：由题意知，矩阵 $A=(\vec{\alpha},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3)$，矩阵 $B=(\vec{\beta},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3)$，根据第七车砖，

$$A+B=(\vec{\alpha}+\vec{\beta},2\vec{\gamma}_1,2\vec{\gamma}_2,2\vec{\gamma}_3)$$

上式的等式两侧同时取行列式，得：

$$|A+B|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta},2\vec{\gamma}_1,2\vec{\gamma}_2,2\vec{\gamma}_3\right|$$

根据第四车砖中所讲的性质 3，有：

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta},2\vec{\gamma}_1,2\vec{\gamma}_2,2\vec{\gamma}_3\right|$$

$$=2\times2\times2\times\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3\right|$$

$$=8\times\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3\right|$$

根据第四车砖中所讲的性质 4，有

$$8\times\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3\right|$$

$$=8\times\left[(\vec{\alpha},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3)+(\vec{\beta},\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\vec{\gamma}_3)\right]$$

$$=8\times[4-2]$$

$$=16$$

1.17 结 尾 语

同学们，考研复习的过程是漫长而又艰苦的，但是，你们要想在考研中取得理想的成绩，就必须坚持下去。外因永远不会起到决定性作用，能够起到决定性作用的只有你们自己的决心与勇气。千万不要被困难所吓倒，相反，你们应该迎难而上。正如那句歌词：还是常言说的好，风光在险峰。待到雨过天晴时，捷报化彩虹。

另外要告诉大家的是，后续章节将延续本章所采用的语言通俗、逻辑清晰以及大量举例的风格，所以大家只要认真地去阅读本书，就一定会有许多收获的。

最后要提醒大家的是，一定要记得把本章的四个房间中所讲的知识默写下来，然后再阅读第 2 章的内容。



第 2 章　第二层——矩阵



矩阵就是矩形啊，就是长方形。同学们，你们知道什么是长方形吗？如果你们知道的话，还有什么理由学不好矩阵呢？

2.1 第一车砖——矩阵的初等变换

本节我来给大家讲解矩阵的初等变换。!

首先我要告诉大家的是，“初等变换”是针对矩阵而言的，大家千万不要认为初等变换是针对行列式的。其次我要告诉大家的是，任何一个矩阵，都可以进行初等变换。

那么，到底什么叫矩阵的初等变换呢？别急，我现在马上就要讲了。我们先来看看矩阵的初等变换的种类，矩阵的初等变换的种类如下所示：!

初等变换
- 初等行变换
  - 互换两行。（1）
  - 以k（$k\neq 0$）乘某行。（2）
  - 把某行乘k后，加到另一行。（3）
- 初等列变换
  - 互换两列。（4）
  - 以k（$k\neq 0$）乘某列。（5）
  - 把某列乘k后，加到另一列。（6）

从以上结构图中大家可以看出来，矩阵的初等变换一共分为六种。下面我就通过举例的方式来讲解每一种初等变换。

例.我就以矩阵$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}$为例，来讲解一下这六种初等变换。

第一种初等变换（互换两行）举例：互换矩阵的第一、二行。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}8&5&10\\1&3&6\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}8&5&10\\1&3&6\end{pmatrix}$

第二种初等变换（以$(k(k\neq 0))$乘某行）举例：以2乘第二行。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&6\\16&10&20\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&6\\16&10&20\end{pmatrix}$

第三种初等变换（把某行乘k后，加到另一行）举例：把第一行乘2后，加到第二行。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&6\\10&11&22\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&6\\10&11&22\end{pmatrix}$

第四种初等变换（互换两列）举例：互换矩阵的第一、二列。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1&6\\5&8&10\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&6\\5&8&10\end{pmatrix}$

第五种初等变换（以 $(k(k\neq 0))$乘某列）举例：以 2 乘第三列。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&12\\8&5&20\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&12\\8&5&20\end{pmatrix}$

第六种初等变换（把某列乘 k 后，加到另一列）举例：把第二列乘 4 后，加到第三列。

写法为$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&18\\8&5&30\end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix}1&3&6\\8&5&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&18\\8&5&30\end{pmatrix}$

需要注意的是，初等变换前的矩阵与初等变换后的矩阵用“~”或“ → ”这两种符号中的任何一种来连接都可以，但**一定不能用**“=”来连接初等变换前的矩阵与初等变换后的矩阵。因为**只有两个一模一样的矩阵之间才可以用等于号**来连接，这点一定要注意。

2.2　第二车砖——初等矩阵

先来复习一下什么叫单位矩阵。单位矩阵是方阵（方阵指行数与列数相等的矩阵），同时单位矩阵又是对角矩阵（对角矩阵指除了对角线以外的所有数都是 0 的方阵），并且还是特殊的对角矩阵，其特殊性体现在：对角线上的数全是 1。

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是方阵，是对角矩阵，是单位矩阵。

$\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&2\\0&0&1\end{pmatrix}$是方阵，不是对角矩阵，不是单位矩阵。

$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是方阵，是对角矩阵，不是单位矩阵。

好，现在开始讲解本节的新知识，本节的新知识是初等矩阵。初等矩阵的定义与单位矩阵有关，同时也与初等变换有关（所以我才在本章的第一车砖中给大家讲了初等变换，

并且刚刚又给大家复习了单位矩阵的概念）。**初等矩阵是这样定义的：单位矩阵只经过一次初等变换后形成的矩阵称为初等矩阵。**

例. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$就是一个初等矩阵。因为：该矩阵是由单位矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$只经过一次初等变换（以 2 乘第二行或者以 2 乘第二列）后所得到的矩阵。

例. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$就不是初等矩阵。因为：单位矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$只经过一次初等变换（无论经过的是六种初等变换中的哪种初等变换）是变换不成$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$的。

2.3 第三车砖——矩阵的秩

- 矩阵的子式的定义。
- 矩阵的秩的定义。
- 利用初等行变换来求矩阵的秩。

2.3.1 矩阵的子式的定义

一个矩阵，无论它是否为方阵，都存在子式。矩阵的子式是一个行列式，也就是说，矩阵的子式是一个数。

那么这个数到底是多少呢？请看下面的例子。

例. 对于矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$而言，该矩阵的**一阶子式**一共有九个，分别为：1，2，3，4，5，6，7，8，9。

该矩阵的**二阶子式**一共也是有九个，分别为：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 18 - 24 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$$

该矩阵的**三阶子式**只有一个，是：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1\times5\times9 + 2\times6\times7 + 3\times4\times8 - 3\times5\times7 - 1\times6\times8 - 2\times4\times9 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 \\ &= 225 - 225 \\ &= 0 \end{aligned}$$

通过这个例子，我们可以总结出矩阵的 n 阶子式的定义：从矩阵中任意抽取 n 行，再从该矩阵中任意抽取 n 列，这 **n** 行 **n** 列相交所得到的 **n** 行 **n** 列的行列式即是矩阵的一个 n 阶子式。

例. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$，假设我们现在的目标是求该矩阵的任意一个二阶子式。则我们需要做的是：从该矩阵的三行中任意选取两行，比如我们选取第一行和第三行。

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ \boxed{7 \quad 8 \quad 9} \end{pmatrix}$$

再从该矩阵的三列中任意选取两列。比如我们选取第二列和第三列。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

所以$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$为该矩阵的一个二阶子式。

大家**千万不要认为**子式是面向方阵的。**正确的理解是：子式是面向任意矩阵的。**

例. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，假设现在我们的目标是求该矩阵的任意一个二阶子式，则我们需要做的是：从该矩阵的三行中任意选取两行，比如我们选取第一行和第三行；再从该矩阵的四列中任意选取两列，比如我们选取第二列和第四列。如下所示：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

所以$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$为该矩阵的一个二阶子式。

关于矩阵的子式，我想我已经给大家说得很明白了。**最后，想提醒大家的是：由矩阵**

的子式的定义可知，一个 m 行 n 列的矩阵，它的最高阶子式的阶数等于 min（m，n），即 m 和 n 当中较小的那个数。比如：若矩阵 A 是一个四行五列的矩阵，那么矩阵 A 的最高阶子式为四阶子式，矩阵 A 绝不会存在五阶和五阶以上的子式，因为矩阵 A 一共就只有四行。

2.3.2　矩阵的秩的定义

矩阵的秩的定义与矩阵的子式密切相关（所以我才先讲矩阵的子式）。矩阵的秩的定义是：如果矩阵 A 中存在至少一个不等于零的 r 阶子式， r 阶以上子式均等于零，则称矩阵 A 的秩为 r ，记为 $\mathrm{r}(A)$。

例：矩阵 A 是四行五列的矩阵（意味着矩阵 A 的最高阶子式是四阶子式）。若矩阵 A 的所有四阶子式都为 0，矩阵 A 的所有三阶子式也都为 0，而 A 的若干个二阶子式中至少有一个不为 0，则矩阵 A 的秩为多少？

解：根据矩阵的秩的定义，立刻可得矩阵 A 的秩为 2。即 $\mathrm{r}(A)=2$。

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$，求矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)$？

解：由于矩阵 A 是一个三行三列的矩阵，所以矩阵 A 的最高阶子式是三阶子式，并且矩阵 A 的三阶子式只有一个（因为三阶子式意味着从 A 中取出三行三列，由于 A 只有三行三列，所以只有一种取法，故矩阵 A 的三阶子式只有一个），就是它本身对应的行列式。通过计算，发现：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=0$$

因此矩阵 A 的所有三阶子式（其实只有这一个）都为 0，此时至少说明矩阵 A 的秩不为 3。然后我们继续，三阶子式算完了，该算二阶子式了，可是矩阵 A 的二阶子式有很多，我们就随便选一个，就算 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}$ 吧。$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=1\times 5-2\times 4=-3\neq 0$，说明矩阵 A 至少存在一个二阶子式不为 0，所以矩阵 A 的秩 $\mathrm{r}(A)=2$。

2.3.3　利用初等行变换来求矩阵的秩

以上我给大家介绍了矩阵的秩的定义（矩阵的秩是通过矩阵的子式来定义的），相信

大家已经掌握了。现在我要问大家一个问题："用什么方法可以求出某矩阵的秩？"我想可能有不少同学都会回答说："就利用矩阵的秩的定义来求某矩阵的秩啊，前面的例题就是这么求的啊，难道不是吗？"我现在要和大家说的是："我们确实可以利用矩阵的秩的定义来求出某矩阵的秩（上面的例题就是这么去求的），"但是，计算量实在是太大了。

我举个例子，比如一个五行五列的秩为 2（目前我们还不知道它的秩为 2）的矩阵 A，我们如果用定义法求矩阵 A 的秩的话，那么我们：

首先应该计算矩阵 A 的所有五阶子式（就一个），发现是 0，此时我们可以确定矩阵 A 的秩不是 5。

然后我们需要计算矩阵 A 的四阶子式，矩阵 A 的四阶子式一共有二十五个，当我们算完矩阵 A 的任意一个四阶子式后，发现是 0，我们就需要继续计算矩阵 A 的其他四阶子式，结果越算越失望，因为每算完一个矩阵 A 的四阶子式后，就会发现是 0，当把矩阵 A 的二十五个四阶子式都算完时，发现这二十五个都是 0。

累了这么半天，我们仅仅确定了矩阵 A 的秩不是 5 也不是 4。但我们仍然是不知道秩究竟是多少。

那么，我们只好再算矩阵 A 的三阶子式，矩阵 A 的三阶子式一共有一百个！我们每算完一个就会发现是 0，结果算了一百次，已经快累疯了，而此时也只能确定矩阵 A 的秩不是 5、4 和 3。

然后我们开始算矩阵 A 的二阶子式，矩阵 A 的二阶子式一共也是有一百个！谁也保证不了自己所算的第一个二阶子式就是非 0 的数，好，那假设我们算到第八十个二阶子式才出现非 0 的数（我的意思是说我们算的前七十九个二阶子式都是 0），那么我们此时才知道矩阵 A 的秩是 2。

大家看看吧，一共要算多少次！所以，用矩阵的秩的定义来计算矩阵的秩简直太麻烦了。

因此，人们就开始琢磨有没有更好的方法来求矩阵的秩。经过研究，提出了一种求矩阵的秩的方法，此方法就是我们接下来要讲的利用初等行变换来求矩阵的秩。在讲之前，我先要告诉大家的是："利用初等行变换来求矩阵的秩"这个知识点非常的重要，贯穿后续各个章节。所以大家一定要重视这个知识点。

利用初等行变换来求矩阵的秩分为以下两大步骤。

第一大步：将矩阵 A 化为阶梯形矩阵。

第二大步：观察此阶梯形矩阵的非零行有多少行，此阶梯形矩阵非零行的数量就是矩阵 A 的秩。

第一大步

第一大步内部又分为两个小步。

第一小步：判断矩阵 A 经过多少步才能化为阶梯形矩阵。

第二小步：按照奇数步化 1、偶数步化 0 的原则，将矩阵 A 化为阶梯形矩阵。

下面开始讲第一大步中的第一小步（判断矩阵 A 经过多少步才能化为阶梯形矩阵）：当给了一个 m 行 n 列的矩阵 A 后，经过“$2\times(\text{m与n中小的那个数}-1)$”个步骤，即可将其化为阶梯形矩阵。例如一个五行四列的矩阵 A，则经过“$2\times(4-1)$”个步骤，即经过六步后可将其化为阶梯形矩阵。这第一小步已经讲完了，很简单，它只不过是求一下矩阵 A 经过多少步才能化为阶梯形矩阵。至于每一步干什么，那就是第二小步需要解决的了。

下面开始讲第一大步中的第二小步：当确定了矩阵 A 化为阶梯形矩阵需要经过的步骤数后，就要开始按照奇数步化 1、偶数步化 0 的原则，将所给矩阵化为阶梯形矩阵。那么到底什么叫奇数步化 1，偶数步化 0 呢？我来举个例子，还是拿刚才的五行四列的矩阵 A 来举例。一个五行四列的矩阵 A，根据第一小步可知，它一共要经过六步才能化为阶梯形矩阵。下面分别介绍这六步。

（1）要做的是“化 1”，因为这一步是奇数步。具体来说，这一步要做的是利用矩阵的三种初等行变换中的“以 $k(k\neq0)$ 乘某行”将 a_{11} 化为 1，再具体的说，“某行”指的是第一行。

（2）要做的是“化 0”，因为这一步是偶数步。具体来说，这一步要做的是利用矩阵的三种初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{11} 正下方的所有数化为 0。再具体的说，“某行”指的是第一行。

（3）要做的是“化 1”，因为这一步是奇数步。具体来说，这一步要做的是利用矩阵的三种初等行变换中的“以 $k(k\neq0)$ 乘某行”将 a_{22} 化为 1。再具体的说，“某行”指的是第二行。

（4）要做的是“化 0”，因为这一步是偶数步。具体来说，这一步要做的是利用矩阵的三种初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{22} 正下方的所有数化为 0。再具体的说，“某行”指的是第二行。

（5）要做的是“化 1”，因为这一步是奇数步。具体来说，这一步要做的是利用矩阵的三种初等行变换中的“以 $k(k\neq0)$ 乘某行”将 a_{33} 化为 1。再具体的说，“某行”指的是第三行。

（6）要做的是“化 0”，因为这一步是偶数步。具体来说，这一步要做的是利用矩阵的三种初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{33} 正下方的所有数化为 0。再具体的说，“某行”指的是第三行。

（7）(如果有)这一步就是利用矩阵的三种初等行变换中的“以 $k(k\neq0)$ 乘某行”将 a_{44} 化为 1。此题不存在第七步。

（8）(如果有)这一步就是用矩阵的三种初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{44} 正下方的所有数化为 0。此题不存在第八步。

这第二小步就讲完了。**要注意的是：无论是奇数步的化 1，还是偶数步的化 0，都只能用初等变换中的初等行变换，而不能用初等变换中的初等列变换。**任意一个矩阵经过这两个小步后，就一定被化为了“阶梯形矩阵”。

好，利用初等行变换来求矩阵的秩的两大步骤中的第一大步（将矩阵A化为阶梯形矩阵）已经给大家讲完了（其中包含两个小步）。我们来看一道例题。

例：将矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵。

解：由此题所问的问题可知，此题考的就是我刚刚讲的“利用初等行变换来求矩阵的秩的两大步骤中的第一大步（其中包含两小步）”。那么我们就先来进行第一小步，即确定矩阵A化为阶梯形矩阵所需要的步骤数。此矩阵为四行四列，因此：2×（4−1）=6。故矩阵A化为阶梯形矩阵需要六步。

我们再来进行第二小步，即：按照奇数步化 1、偶数步化 0 的原则，将矩阵A化为阶梯形矩阵。

（1）利用初等行变换中的“以$k(k\neq 0)$乘某行”将a_{11}化为 1 。“某行”指的是第一行。

变换方法：由于a_{11}目前是 2，要把它变成 1，所以用$\frac{1}{2}$乘以第一行。

$$\begin{pmatrix}2&0&0&2\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}$$

（2）利用初等行变换中的“把某行乘 *k* 后，加到另一行”将a_{11}正下方的所有数都化为 0。“某行”指的是第一行。

变换方法：由于a_{11}是 1，而a_{11}正下方的三个数分别是 1、3、1，我们要把这三个数都化为 0，所以我们的做法是把第一行乘以（−1）加到第二行，把第一行乘以（−3）加到第三行，把第一行乘以（−1）加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\3&-1&0&0\\1&4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\0&-1&0&-3\\1&4&5&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\0&-1&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}$$

好，现在我来和大家解释一下。不知大家发现没有，奇数步的化 1 其实是为偶数步的化 0 服务的。就拿咱们刚刚做完的步骤 1 和步骤 2 来说吧。如果没有步骤 1，那么 a_{11} 就不是 1 而是 2，那么在进行步骤 2 时就需要乘以分数才行，非常麻烦，明白了吧。

（3）利用初等行变换中的“以 $k(k\neq 0)$ 乘某行”将 a_{22} 化为 1。“某行”指的是第二行。

变换方法：由于 a_{22} 目前是 **2**，要把它变成 **1**，所以用 $\frac{1}{2}$ 乘以第二行。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\0&-1&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&-1&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}$$

（4）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{22} 正下方的所有数都化为 0。“某行”指的是第二行。

变换方法：由于 a_{22} 是 **1**，而 a_{22} 正下方的两个数分别是 **−1**、**4**，我们要把这两个数都化为 **0**，所以我们的做法是把第二行乘以 **1** 加到第三行，把第二行乘以（**−4**）加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&-1&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&-3\\0&4&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&-3\\0&0&5&0\end{pmatrix}$$

（5）利用初等行变换中的“以 $k(k\neq 0)$ 乘某行”将 a_{33} 化为 1。“某行”指的是第三行。

现在我要给大家讲一个非常重要的知识点，即一种特殊情况。大家看，现在 a_{33} 是 **0**。由此可知，无论第三行乘以多少，a_{33} 都不可能变成 **1**，这就是我所说的特殊情况。

下面我用标准的语言描述一下这种特殊情况并且给出解决方法。

特殊情况：当做奇数步（即做化 **1**）的步骤时，可能会遇到 a_{ii} 为 **0** 的情况。

解决方法：看 a_{ii} 正下方的数，记住是正下方，看看其中有没有非 **0** 的数。

如果有，那么此时立刻将该数所在行与第 **i** 行互换，这样一来，a_{ii} 就不是 **0** 了，而是一个非 **0** 的数，然后我们就可以正常做了（即利用初等行变换中的“以 $k(k\neq 0)$ 乘某行”将 a_{ii} 化为 **1**）；

如果没有，则此时我们根本不用去管 a_{ii} 了，而是把 $a_{i(i+1)}$ 当成 a_{ii} 即可（也就是说，本来我们要做的是将 a_{ii} 化为 **1**，现在变为了将 a_{ii} 右侧的那个数 $a_{i(i+1)}$ 化为 **1**）。

好，让我们回到此题上来。此题所遇到的正是这种特殊情况，所以我们要按照此特殊情况的解决方法来处理。我们来看 a_{33} 的正下方有没有非 **0** 的数，有！a_{33} 的正下方虽然只有一个数，但是它是非 **0** 的数，**5**！太好了，所以我们现在将第三行与第四行互换，然后将新的第三行乘以 $\frac{1}{5}$ 即可。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&-3\\0&0&5&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$$

（**6**）利用初等行变换中的“把某行乘 $\boldsymbol{k}$ 后，加到另一行”将 a_{33} 正下方的所有数都化为 0 。“某行”指的是第三行。

变换方法：a_{33} 正下方只有一个数，并且本来就是 **0**，所以根本不用变换了，这一步直接跳过。

好，经过以上六个步骤后，形成的矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$ 就是矩阵 A 对应的阶梯形矩阵。

通过以上这道例题，同学们应该已经知道如何将一个任意给的矩阵化为阶梯形矩阵了吧。不过在这里我还是要和同学们说两点需要注意的地方。

第一点：每位同学在将同一个矩阵变为阶梯形矩阵的过程中，由于用到的初等行变换方法不同，导致最终得到的阶梯形矩阵也不同。这是很正常的事情。

第二点：在将矩阵化为阶梯形矩阵的过程中，无论做奇数步还是做偶数步时，一旦发现某一行所有数都为 0，则立刻将此行与最后一行互换，然后再继续。

下面我再来说一道例题。

例：将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵。

解：先进行第一小步，即确定矩阵 A 化为阶梯形矩阵所需要的步骤数。此题所给的矩阵 A 是四行五列的矩阵。因此：2×（4−1）=6。故矩阵 A 化为阶梯形矩阵共需要六步。再进行第二小步，即按照奇数步化 1、偶数步化 0 的原则，将矩阵 A 化为阶梯形矩阵。

（1）利用初等行变换中的“以 $k(k\neq 0)$ 乘某行”将 a_{11} 化为 1。“某行”指的是第一行。

变换方法：由于 a_{11} 本来就是 1，所以这一步直接跳过。

（2）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{11} 正下方的所有数都化为 0。“某行”指的是第一行。

变换方法：由于 a_{11} 是 1，而 a_{11} 正下方的三个数分别是 2、4、3，我们要把这三个数都化为 0，所以我们的做法是把第一行乘以（−2）加到第二行，把第一行乘以（−4）加到第三行，把第一行乘以（−3）加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6\\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6\\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12\\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

（3）利用初等行变换中的“以 $k(k\neq 0)$ 乘某行”将 a_{22} 化为 1。“某行”指的是第二行。

变换方法：由于目前是−3，要把它变成 1，所以用 $-\frac{1}{3}$ 乘以第二行。

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6\\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12\\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2\\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12\\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3\end{pmatrix}$$

（**4**）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{22} 正下方的所有数都化为 **0**。“某行”指的是第二行。

变换方法：由于 a_{22} 是 **1**，而 a_{22} 正下方的两个数分别是−**10**、**3**，我们要把这两个数都化为 **0**，所以我们的做法是把第二行乘以 **10** 加到第三行，将第二行乘以（−**3**）加到第四行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

（**5**）利用初等行变换中的“以 $k(k \neq 0)$ 乘某行”将 a_{33} 化为 **1**。“某行”指的是第三行。

变换方法：大家还记得我在上一道题中讲的“特殊情况”吧？那么现在，正好又面临这种情况。a_{33} 是 **0**，于是我们看 a_{33} 正下方的数中有没有非 **0** 的数，结果发现其正下方的所有数（只有一个数）也都是 **0**。所以，我们现在要做的是：将 a_{33} 右侧的（$-\frac{8}{3}$）当成 a_{33} 即可。换句话说，我们现在要做的已经不是把 a_{33} 化为 **1** 了，而是要把（$-\frac{8}{3}$）化为 **1**。所以变换方法是第三行乘以（$-\frac{8}{3}$）。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

（**6**）利用初等行变换中的“把某行乘 k 后，加到另一行”将 a_{22} 正下方的所有数都化为 0 。“某行”指的是第三行。

变换方法：由于 a_{33} 是 **1**，而 a_{33} 正下方只有一个数 **3**，我们要把 **3** 化为 **0**。所以我们的做法是把第三行乘以（−**3**）加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

好，经过以上六个步骤后，形成的矩阵$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$就是矩阵$A$对应的阶梯形矩阵。

第二大步

好，通过以上两道例题，相信同学们对“利用初等行变换来求矩阵的秩”的第一大步（将矩阵A化为阶梯形矩阵）已经非常熟悉了。现在我们来看“利用初等行变换来求矩阵的秩”的第二大步，即：观察此阶梯形矩阵的非零行有多少行，此阶梯形矩阵非零行的数量就是矩阵A的秩。

对于这第二大步，由于实在是太简单了，所以我不多说，只说一句：如果矩阵的某行的所有数全为零，则该行被称为零行，否则该行就被称为非零行。

例：本小节的第一道例题中，矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$化为阶梯形矩阵后是$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$，由于$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$中非零行有四行（所有行都是非零行），所以矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 5 & 1\end{pmatrix}$的秩为 4，即 $r(A)=4$。

例：本小节的第二道例题中，矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$ 化为阶梯形矩阵后是

$\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，由于 $\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&\frac{1}{3}&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 中的非零行有三行，所以矩阵

$A=\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$ 的秩为 3，即 $r(A)=3$。

终于把砖运来了

同学们，这么恶劣的天气，你们仍然坚持运来了三车砖，真的是很棒。你们可以稍微休息一下，等休息完了，我们就要开始盖线性代数大楼第二层的八个房间了。我在此再次强调：上面的“砖”中的内容你只要理解了并且会使用就行，而接下来的“房间”中的内容，你不但要理解且会使用，还要找白纸默写下来，因为“房间”中的内容是考研的考点。每章如此这般，保你线性代数满分。

2.4 房间 201——第一个大总结

方阵 A：

(1) A满秩 ⇔ A可逆 ⇔ 行列式$|A|$不等于0 ⇔ 齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$有唯一零解 ⇔ 非齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$（无论$\vec{b}$长什么样）有唯一解。

(2) A不满秩 ⇔ A不可逆 ⇔ 行列式$|A|$等于0 ⇔ 齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$有非唯一解(非零解）（无穷多解）⇔ 非齐次方程组$A\vec{X}=\vec{b}$（无论$\vec{b}$长什么样）有非唯一解(无穷多解)或无解。

注意：“⇔”的意思是充分必要条件。

以上的大总结可以说重要极了，这个大总结贯穿了整个线性数学科。请大家务必背下来。

这个大总结针对方阵（行数与列数相等的矩阵）来说的，这个是大前提，一定要记住了。从中大家可以看出来，这个大总结其实就是两组充分必要条件。

这两组充分必要条件中的每一组都包含了与矩阵 A 有关的五种情况，五种情况的两两之间都是用符号“ $\Leftrightarrow$ ”来连接的，这说明它们之间存在“知道任意一个，可以推出其他四个”的关系。

另外，我来给大家解释一下总结中出现的词“满秩”的意思。所谓满秩，是只有方阵（行数和列数相等的矩阵）才具有的概念。满秩具体指的是：若一个 n 行 n 列的矩阵（也就是 n 阶方阵）的秩为 n，则称该矩阵为满秩矩阵，或称该矩阵满秩。明白了吧。例如，若四行四列的矩阵 A 满秩，则我们立刻可以知道矩阵 A 的秩为 4，即 $r(A)=4$。

本节就讲到这里。大家一定会感到非常奇怪：既然本节如此重要，为何知识点后面连一道题都没有呢？我的回答是：并非没有题，相反，题多的是，数不胜数，但是，我不能把题写在这里。

这是为什么呢？因为本节所讲的知识点涉及到的题虽然非常的多，但是那些题中除了考到了本节所讲的知识点以外，还考到了我目前还没有讲给大家的知识点，所以我不能把那些题写在这里，而要先继续给大家讲知识点，然后再让大家练题。明白了吧。这其实也是本书的一个特色：在某个知识点下面对应的习题中，绝对不会出现既包含该知识点又包含没讲的知识点的习题。

最后，我再次强调，本节所讲的大总结太重要了，请大家务必先把这个大总结背下来，再继续往后看。

2.5　房间 202——第二个大总结

第二个大总结就是六个结论。

①　$A_{1\times n}\times B_{n\times 1}=$ 一个数。

解释：n 维行向量乘以 n 维列向量等于的是一个数字，而不再是矩阵了。因为 n 维行向量，n 维列向量都是矩阵（我在第 1 章的第十车砖中提到过，向量就是矩阵，只不过是行数为 1 或列数为 1 的矩阵而已），那么两个向量相乘，其实就是两个矩阵相乘。根据矩阵相乘的运算法则，一个一行 n 列的矩阵和一个 n 行一列的矩阵相乘，得到的是一个一行一列的矩阵，而一行一列的矩阵就是一个数（这个知识点要是以前不知道的话，现在赶快记下来）。因此，n 维行向量乘以 n 维列向量等于一个数。

例. $(1\quad 2\quad 3)\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=1\times4+2\times5+3\times6=32$

② $A_{n\times1}\times B_{1\times n}=C_{n\times n}$

解释：n 维列向量乘以 n 维行向量等于 n 行 n 列的方阵。

③ $A_{1\times n}\times B_{n\times n}=C_{1\times n}$

解释：n 维行向量乘以 n 阶方阵等于 n 维行向量。

例. $(1\quad 2\quad 3)\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=(30\quad 36\quad 42)$

另外，若这个 n 维行向量 $A_{1\times n}$ 中第 i 列为 1，其余列都为 0，则该 n 维行向量与 n 阶方阵相乘可以不用计算而直接得出答案，答案为 n 阶方阵的第 i 行。

例. $(1\quad 0\quad 0)\times\begin{pmatrix}3&7&9\\2&4&8\\5&6&7\end{pmatrix}=(3\quad 7\quad 9)$

例. $(0\quad 1\quad 0)\times\begin{pmatrix}3&7&9\\2&4&8\\5&6&7\end{pmatrix}=(2\quad 4\quad 8)$

④ $A_{n\times n}\times B_{n\times1}=C_{n\times1}$

解释：一个 n 阶方阵乘以一个 n 维列向量等于 n 维列向量。

例. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\32\\50\end{pmatrix}$

另外，若这个 n 维列向量 $B_{n\times1}$ 中第 i 行为 1，其余行都为 0，则 n 阶方阵与该 n 维列向

量相乘可以不用计算而直接得出答案，答案为 n 阶方阵的第 i 列。

例. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

例. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

现在大家已经看完六条结论中的四条了，我想跟大家解释一下，我在每次讲课讲到本节的内容时，经常会有很多同学对此表示不理解。

他们说："这怎么能算是一节呢？这分明是第 1 章中的矩阵的运算嘛，这不是早就讲过了吗，在第 1 章中讲矩阵的运算的时候不是已经说了 $A_{a\times b}\times B_{b\times c}=C_{a\times c}$ 了嘛，那这节的内容纯属多余啊，全能从 $A_{a\times b}\times B_{b\times c}=C_{a\times c}$ 推出来啊，讲它干吗！"

我的回答是："你们说得对，本节所讲的内容确实能从 $A_{a\times b}\times B_{b\times c}=C_{a\times c}$ 推出来。"

听到我这么回答，他们更加不解了，继续追问："那现在还讲有啥意义？"想必正在看此书的你，也会有此疑问。

我现在来回答："虽然本节所讲内容完全能从第 1 章所讲的 $A_{a\times b}\times B_{b\times c}=C_{a\times c}$ 推出来，但是我希望大家以后根本不要去推，而是死死地把本节内容背下来，以后做题时形成条件反射。例如，我曾经教过一个学生，当他看到某道题中的 $\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}=3$ 时，一直在琢磨"为何两个向量相乘能得一个数字"的问题，想了好久才根据矩阵的乘法推出 $\vec{\alpha}$ 是一个列向量，他可高兴了。孰不知，$\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}=3$ 只是他做的那道题的若干条件中的一个，出题人认为同学看完这个条件后，应该立刻想到 $\vec{\alpha}$ 是列向量，所以出题人根本没在这里设考点，结果他还琢磨半天才琢磨出来。琢磨出来后认为大功告成了，再一看后面，还有那么多条件没看，问题又那么长，瞬间丧失信心了。

如果该同学把本节所讲的第一个结论（$A_{1\times n}\times B_{n\times 1}=$ 一个数）背下来了的话，则看完 $\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}=3$ 这个条件后，他立刻就会知道 $\vec{\alpha}$ 是列向量，根本不用再去从矩阵的乘法运算入手去想为什么两个向量相乘能得一个数了。大大加快了他的做题速度。这也是我讲本节的原因，大家明白了吧。

⑤ 设 $\vec{\alpha}$ 为 n 维列向量，则：$\vec{a}^T\vec{a}\geq 0$。并且有 $\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}^T\vec{\alpha}=0$；$\vec{\alpha}\neq\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}^T\vec{\alpha}\neq 0$。

解释：这第五个结论其实是第一个结论的一个特例。为什么这么说呢？听我具体解释：前面的第一个结论说的是一个 n 维行向量乘以一个 n 维列向量等于一个数。而现在这第五个结论说的也是一个 n 维行向量乘以一个 n 维列向量等于一个数。但是，这第五个结论中说的 n 维列向量规定死了是 n 维行向量的转置。在这种情况下，就不仅可以确定乘出的东西是一个数，而且还可以确定该数必为大于或等于 0 的数。

这还不算完，在这种情况下，$\vec{\alpha}=\vec{0}$ 和 $\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}=0$ 互为充分必要条件，$\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ 和 $\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}\neq 0$ 互为充分必要条件。大家一定要把这个结论背下来。下面的内容是这第五个结论的证明过程，建议大家也看看，因为这样可以更加深入地理解这第五个结论。

证明过程如下：

假设 $\vec{\alpha}$ 为三维列向量，设 $\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$，则 $\vec{a}^T\vec{a}=(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2+z^2$，是一个行向量。所以：$\vec{a}^T\vec{a}=(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x^2+y^2+z^2$，所以必定有 $\vec{a}^{\mathrm{T}}\vec{a}\geq 0$ 。

我们继续来看，$\vec{a}=0$ 的意思是此向量为零向量，什么叫零向量？零向量的意思是向量中的每个数均为 0。好，也就是说：x=0，y=0，z=0。明显可以和 $x^2+y^2+z^2$=0，即 $\vec{a}^T\vec{a}=0$ 进行互推。当然，$\vec{a}\neq 0$ 也可以和 $x^2+y^2+z^2\neq$0 即 $\vec{a}^T\vec{a}\neq 0$ 进行互推。

⑥设 A 为 n 阶方阵（n 行 n 列的矩阵），则：AA^T 为零矩阵 $\Leftrightarrow$ A 为零矩阵。

解释：对于方阵 A 来说，AA^T 为零矩阵可以和 A 为零矩阵进行互推

证明过程如下：首先从右向左证。若 A 为零矩阵（矩阵 A 中的所有数都为 0），则 A^T 也为零矩阵，由于两个零矩阵相乘肯定还是零矩阵，所以 A^TA 为零矩阵。

然后从左往右证。

设：$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

则：$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{\mathrm{n}1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{\mathrm{n}n} \end{pmatrix}$

则：$AA^T = \begin{pmatrix} \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{1j}^2 & * & \cdots & * \\ * & \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{2j}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{nj}^2 \end{pmatrix}$

注意：我们并不用关注*处到底是多少，只需关注对角线。由于 AA^T 为零矩阵，所以矩阵 AA^T 中的每一个数均为 0。所以：

$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2$ 、 $\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2$ .... $\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2$ 、*处都为 0。

$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 = 0$　得：a_{11}，a_{12} …… a_{1n} =0。

$\sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 = 0$　得：a_{21}，a_{22} …… a_{2n} =0。

……

$\sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2 = a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2 = 0$　得：a_{n1}，a_{n2} …… a_{nn} =0。

故 A 为零矩阵。

房间 202 已经盖完了，这六条结论请大家一定要背下来。

2.6 房间 203——矩阵乘法的两条定律

2.6.1 矩阵乘法满足结合律

所谓矩阵乘法满足结合律，其实指的就是可以任意添加括号。例如：A、B、C、D、E、F 是六个矩阵，不一定是方阵，但是如果 $A\times B\times C\times D\times E\times F$ 存在，则：$A\times B\times C\times D\times E\times F=A\times(B\times C)\times(D\times E)\times F=(A\times B)\times(C\times D)\times(E\times F)$。这个例子就应用了矩阵乘法的结合律。

2.6.2 矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律

矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律其实指的就是下面两个等式：

① $A(B+C)=AB+AC$

② $(B+C)A=BA+CA$

2.7 房间 204——可交换的矩阵相乘特例

首先需要注意的是，矩阵乘法不满足交换律。也就是说，AB 不一定等于 BA。但是，在以下五个式子中，矩阵相乘是可以交换的。

① $E\times A=A\times E=A$，其中 E 为单位矩阵。

例. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

② $kE\times A=A\times kE=kA$，其中 E 为单位矩阵，k 为任意常数。

例. $\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&10&15\\20&25&30\\35&40&45\end{pmatrix}$

③ $(aA+bE)\times(aA-bE)=(aA-bE)\times(aA+bE)$

$(aE+bA)\times(aE-bA)=(aE-bA)\times(aE+bA)$

其中 E 为单位矩阵，a、b 为任意常数。

例. $(3A+2E)\times(3A-2E)=(3A-2E)\times(3A+2E)$

$(3E+2A)\times(3E-2A)=(3E-2A)\times(3E+2A)$

④ $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=E$，其中 A^{-1} 为 A 的逆矩阵。

⑤ $(E+A)^{-1}\times(E-A)=(E-A)\times(E+A)^{-1}$

2.8　房间 205——关于矩阵转置的四个公式

公式 1：$(A^T)^T=A$

公式 2：$(A+B)^T=A^T+B^T$，其中矩阵 A、矩阵 B 的行数、列数均相同。

公式 3：$(AB)^T=B^TA^T$、$(ABC)^T=C^TB^TA^T$，以此类推。

公式 4：$(kA)^T=kA^T$，其中 k 为任意常数。

2.9　房间 206——关于矩阵可逆的六个公式

公式 1：$(A^{-1})^{-1}=A$。

公式 2：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$、$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$，以此类推。

公式 3：$(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$，其中 k 是不为零的常数。

公式 4：$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$。

公式 5：$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$。

公式 6：$(A^*)^T=(A^T)^*$。

考研题 2.1 设 A 是对称阵，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$ 。证明：

（1）kA（k 是常数）是对称阵。

（2）A^k（k 是正整数）是对称阵。

（3）f(A)是对称阵。

解：先来看看什么叫对称阵，对称阵也叫对称矩阵。其定义为：若 $A^T=A$，则称矩阵 A 为对称矩阵。顺便再来看一下什么叫反对称阵，反对称阵也叫反对称矩阵。其定义为：若 $A^T=-A$，则称矩阵 A 为反对称矩阵。此题直接用对称阵的定义来证明即可。

（1）根据房间 205 中的公式 4，可得 $(kA)^T=kA^T$ 。又因为此题的已知条件“A 为对称阵”，根据对称阵的定义有 $A^T=A$，所以 $kA^T=kA$。由 $(kA)^T=kA^T$ 、$kA^T=kA$ 可得 $(kA)^T=kA$ 。这正好符合对称阵的定义，所以 kA 是对称阵。

（2）$(A^k)^T=(A\times A\times...\times A)^T$，这一步任何定理都没用，只是把 A^k 展开了而已。然后，根据房间 205 中的公式 3 可得，$(A\times A\times...\times A)^T=A^T\times A^T\times...\times A^T=(A^T)^k$。又因为矩阵 A 为对称矩阵，所以有：$A^T=A$，所以 $(A^T)^k=A^k$，即：$(A^k)^T=A^k$。所以 A^k 是对称阵。

（3）由题目已知，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n$，

得 $f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots\cdots+a_nA^n$。

注意，a_0 要变为 a_0E，因为 a_0 是一个数，而 a_1A 、a_2A^2 等等都是矩阵，数是无法与矩阵相加的，所以 a_0 要变为 a_0E 。

$[f(A)]^T=(a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots\cdots+a_nA^n)^T$

根据房间 205 中的公式 2，有：

$(a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots\cdots+a_nA^n)^T$

$=(a_0E)^T+(a_1A)^T+(a_2A^2)^T+\cdots\cdots+(a_nA^n)^T$

根据房间 205 中的公式 4，有：

$$=a_0E^T+a_1A^T+a_2(A^2)^T+\cdots\cdots+a_n(A^n)^T$$

由于 $E^T=E$，并且再根据此题（2）中的结论，有：

$$=a_0E+a_1A+a_2(A^2)+\cdots\cdots+a_n(A^n)=f(A)$$

所以 $f(A)$ 为对称矩阵。

这道题就做完了。这道题考的知识点是：房间 205 和对称阵的定义，其他什么也没考。

考研题 2.2 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}$，$\vec{X}=(x_1,x_2,x_3)^T$，计算 $\vec{X}^T A\vec{X}$ 的值。

解：首先，$\vec{X}$ 是一个列向量而不是行向量，因为右上角有转置符号，看见了吧。考研题中表示列向量也会这样表示。好，既然 $\vec{X}$ 是列向量，那么 $\vec{X}^T$ 就是行向量（这很好理解吧，列向量的转置肯定是一个行向量）。然后我们观察一下此题：$\vec{X}^T A\vec{X}$，由于 $\vec{X}^T$ 是行向量，而 $\vec{X}$ 是列向量，所以此题的问题是：一个行向量乘以一个方阵，然后再乘以一个列向量。

根据房间 202，一个行向量乘以一个方阵是一个行向量，行向量乘以列向量是一个数。所以，立刻就可以知道 $\vec{X}^T A\vec{X}$ 是一个数，而不是一个矩阵。现在我们要解决的问题只不过是计算一下这个数是多少而已。

下面正式开始做此题。此题很简单，直接使用线性代数大楼第一层中的第七车砖中的矩阵乘法运算即可。

$$\vec{X}^T A=(x_1,x_2,x_3)\times\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&3\\2&-3&0\end{pmatrix}$$

$$=(-x_2+2x_3,x_1-3x_3,-2x_1+3x_2)$$

$$\vec{X}^T A\vec{X}=(-x_2+2x_3,x_1-3x_3,-2x_1+3x_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1(-x_2+2x_3)+x_2(x_1-3x_3)+x_3(-2x_1+3x_2)$$

$$=-x_1x_2+2x_1x_3+x_1x_2-3x_2x_3-2x_1x_3+3x_2x_3$$

$$=0$$

考研题 2.3 A是 n 阶矩阵，满足$A^T=-A$，对任意的$\vec{X}=(x_1,x_2,x_3)^T$，计算$\vec{X}^T A\vec{X}$的值。

解：此题与上一题有所不同，此题的矩阵A没有直接给出来，因此此题的做法绝不会和上道题一样。

由上题可知，$\vec{X}^T A\vec{X}$是一个数，而一个数的转置就是它本身（这很好理解，一个数就相当于是一个一行一列的矩阵，转置当然等于它本身）。所以有：

$$\vec{X}^T A\vec{X}=(\vec{X}^T A\vec{X})^T \qquad ①式$$

根据房间 205 中的公式 3：

$$(\vec{X}^T A\vec{X})^T=\vec{X}^T A^T(\vec{X})^T=\vec{X}^T A^T\vec{X} \qquad ②式$$

又因为题中说了$A^T=-A$，所以有：

$$\vec{X}^T A^T\vec{X}=-\vec{X}^T A\vec{X} \qquad ③式$$

由②式、③式得：

$$(\vec{X}^T A\vec{X})^T=-\vec{X}^T A\vec{X} \qquad ④式$$

由①式、④式得：

$$\vec{X}^T A\vec{X} = -\vec{X}^T A\vec{X}$$ ⑤式

由于 $\vec{X}^T A\vec{X}$ 为一个数，我们不妨设此数为 B。根据⑤式有：

$B = -B$

$\Rightarrow 2B = 0$

$\Rightarrow B = 0$

即 $\vec{X}^T A\vec{X}$=0

考研题 2.4 设 $\vec{\alpha} = (\frac{1}{2}, 0, ..., 0, \frac{1}{2})_{1\times n}$，$E$ 是 n 阶单位阵，$A = E - \vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$，$B = E + 2\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$，求 AB？

解：$A\times B = (E - \vec{\alpha}^T\vec{\alpha})(E + 2\vec{\alpha}^T\vec{\alpha})$

根据房间 203（矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律）得：

$$A\times B = (E - \vec{\alpha}^T\vec{\alpha})(E + 2\vec{\alpha}^T\vec{\alpha})$$

$$= E^2 + 2E\vec{\alpha}^T\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^T\vec{\alpha}E - 2\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$$

由于单位矩阵 E 乘以任何矩阵都等于该矩阵本身，所以：

$$= E + 2\vec{\alpha}^T\vec{\alpha} - \vec{\alpha}^T\vec{\alpha} - 2\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$$

合并同类项，得：

$$= E + \vec{\alpha}^T\vec{\alpha} - 2\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$$

根据房间 203，矩阵乘法满足结合律。得：

$$= E + \vec{\alpha}^T\vec{\alpha} - 2\vec{\alpha}^T(\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T)\vec{\alpha}$$

又：$\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\,\\0\\,\\\vdots\\,\\0\\,\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}+0+0+\cdots+0+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

所以：

$$E+\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}^T(\vec{\alpha}\vec{\alpha}^T)\vec{\alpha}$$

$$=E+\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}-\vec{\alpha}^T\vec{\alpha}$$

$$=E$$

考研题 2.5 已知 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$，写出 A 可逆的一个充分必要条件，当 A 可逆时，求 A^{-1}。

解：**根据房间 201，可以写出 A 可逆的很多充分必要条件。**而此题只写出一个即可，那我就写行列式不等于 0 吧 。

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$，则 $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=ad-bc$

则 $ad-bc\neq0$ 是 A 可逆的一个充分必要条件。

然后，此题还有一问，求 A^{-1}。求一个矩阵的逆矩阵的方法我早在第 1 章就已经讲过了，这里就不再赘述了。

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^*=\frac{1}{ad-bc}\times\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$$

考研题 2.6 A、B 都是 n 阶方阵，满足 $AB=A-B$，证明：$AB=BA$。

解：**要注意，此题的结论可不是说明矩阵乘法满足交换律。只是针对满足 $AB=A-B$ 的两个矩阵 A、B，才有 $AB=BA$。**

言归正传，此题的证明过程如下：

$AB=A-B$　　①式

$A+E-E=A$　　②式

$A-B+B=A$　　③式

根据①式、③式得：

$AB+B=A$　　④式

由于任何矩阵与单位矩阵 E 相乘还等于它本身，结合④式有：

$AB+EB=A$　　⑤式

根据房间 203（矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律），结合⑤式有：

$(A+E)B=A$　　⑥式

根据②式、⑥式得：

$(A+E)B=(A+E)-E$　　⑦式

$(A+E)-B-(A+E)=-E$

$(A+E)B-(A+E)E=-E$

$(A+E)(B-E)=-E$

$(A+E)(E-B)=E$　　⑧式

由可逆矩阵的定义式 $AA^{-1}=E$ 可知，$(A+E)$ 与 $(E-B)$ 互为逆矩阵。根据房间 204 的④可得：

$(A+E)(E-B)=(E-B)(A+E)$　　⑨式

根据⑧式、⑨式得：

$(E-B)(A+E)=E$　　⑩式

根据房间 203（矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律），结合⑩式得：

$EA+E^2-BA-BE=E$

$A+E-BA-B=E$

$BA = A - B$

结合①式，可得：

$AB = BA$。

2.10 房间 207——可逆矩阵、初等变换、初等矩阵、矩阵的秩之间的关系以及等阶矩阵

关于可逆矩阵，大家应该都很熟悉了。若 $AB = E$ ，则称 A 为可逆矩阵，B 就是 A 的逆矩阵。当然，B 也为可逆矩阵，A 就是 B 的逆矩阵。

关于初等变换，之前也已经讲过。初等变换共有六种：互换两行，某行乘以 k（$k\neq 0$），某行乘以 k 之后加到另外一行，互换两列，某列乘以 k（$k\neq 0$），某列乘以 k 之后加到另外一列。

初等矩阵呢，我想大家也不陌生。单位矩阵经过一次初等变换后形成的矩阵称为初等矩阵。

而矩阵的秩是通过子式来定义的，我在之前也用大量篇幅讲过。

上面说的其实都是一些最基本的知识点，而现在的房间 207 则是把这几个知识点融会贯通，使得同学们对于这部分知识的掌握达到考研的要求。

2.10.1 可逆矩阵与初等矩阵的关系

一个可逆矩阵可以写为若干个初等矩阵的乘积。至于具体可写为多少个初等矩阵的乘积以及每个初等矩阵是什么，就不是考研范围所要求的了。

例如矩阵 A 为可逆矩阵，则必有 $A = P_1P_2\cdots P_n$，其中 P_1、$P_2\cdots$、P_n 均为初等矩阵。

2.10.2 初等矩阵与初等变换的关系

初等矩阵左乘任何一个矩阵，相当于给该矩阵进行相应的初等行变换；初等矩阵右乘任何一个矩阵，相当于给该矩阵进行相应的初等列变换。

这个知识点太有用了，学会了这个知识点，以后在计算涉及初等矩阵的乘法题时，就方便多了。

例. $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，请计算 AB 和 BA？

解：先来看 AB 。

$A\times B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，由于矩阵 A 是单位矩阵 E 经过一次初等变换（第一行×2）后得到的矩阵，所以矩阵 A 是初等矩阵。则此题属于：初等矩阵 A 左乘矩阵 B 。根据之前所述，相当于给 B 进行相应的初等行变换。什么叫“相应的”？“相应的”在本题中指的是“初等矩阵 A 是由单位矩阵 E 经过怎么样的行变换变来的，则也把 B 进行怎么样的行变换。”本题中，初等矩阵 A 是单位矩阵 E 的第一行乘以 2 之后形成的，所以只要将矩阵 B 的第一行乘以 2，就是本题的答案。

所以 $A\times B=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$

再来看 BA

$B\times A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，刚才我已经说了，矩阵 A 是初等矩阵，因为它是单位矩阵 $E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 经过一次初等变换（第一行×2）后得到的。但是同时，同学们你们发现没发现，这矩阵 A 也可以由单位矩阵 E 的第一列乘以 2 得到。现在就得这么看，因为现在初等矩阵 A 在乘号右边，所以是初等矩阵 A 右乘矩阵 B，相当于把 B 进行相应的初等列变换而不是行变换。那就必须知道矩阵 A 是单位矩阵 E 经过怎样的列变换得到的，明白了吧。好，既然 A 这个初等矩阵是单位矩阵 E 的第一列乘以 2 后得到的。则只要把 B 的第一列乘以 2，就可以得到 $B\times A$ 。

所以 $B\times A=\begin{pmatrix}2&2&3\\8&5&6\\14&8&9\end{pmatrix}$

这道题已经做完了。发现了吧，利用这种方法来做矩阵乘法会非常方便。但是千万别忘了，只有相乘的两个矩阵中有初等矩阵（单位矩阵经过一次初等变换后所形成的矩阵）时，才可以这么做。另外，同样一个初等矩阵，如果在乘号左侧，则看它是由单位矩阵E经过什么样的初等行变换后得到的，如果在乘号右侧，则看它是由单位矩阵E经过什么样的初等列变换后得到的。

考研题 2.7

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{21} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{11} \end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

则 $B=$

（A）P_1AP_2　　　　（B）P_2AP_1

（C）P_1P_2A　　　　（D）AP_1P_2

解：这是一道选择题，咱们就一个一个的验证吧。

（A）选项：先来算P_1A。观察P_1矩阵，发现P_1是一个初等矩阵。P_1是单位矩阵E的第一、三行互换后所得到的矩阵。同时P_1也是单位矩阵E的第一、三列互换后得到的矩阵。由于在P_1A中，初等矩阵P_1处于乘号的左侧，所以关注前者而不关注后者。所以P_1A是将矩阵A的第一、三行互换后所得到的矩阵。所以：

$$P_1A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

再来算P_1AP_2。观察P_2的矩阵，发现P_2也是一个初等矩阵。P_2是单位矩阵E的第三行乘以 1 加到第一行后所得到的矩阵，同时P_2也是单位矩阵E的第一列乘以 1 加到第三列后所得到的矩阵。由于在$P_1A\times P_2$中，初等矩阵P_2处于乘号右侧，所以关注后者而不关注前者。所以P_1AP_2是将矩阵P_1A的第一列乘以 1 加到第三列后所得到的矩阵。所以：

$$P_1AP_2=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33}+a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+a_{21} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13}+a_{11} \end{pmatrix}=B$$

所以（A）选项就是正确的选项。至于（B）、（C）、（D）选项，我只给出最终结果，同学们一定要做一遍，看看和我给出的结果是否一致。

（B）选项：

$$P_2AP_1=\begin{pmatrix} a_{13}+a_{33} & a_{12}+a_{32} & a_{11}+a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$$

（C）选项：

$$P_1P_2A=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{pmatrix}$$

（D）选项：

$$AP_1P_2=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}+a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21}+a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31}+a_{33} \end{pmatrix}$$

2.10.3　初等变换与矩阵的秩的关系

初等变换是不改变矩阵的秩的。换言之，一个矩阵无论经过多少次初等变换，初等变换后所得到新矩阵的秩与原矩阵的秩是一样的。

考研题 2.8　矩阵 $A=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$，其中 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 均为三维向量，矩阵 A 是满秩矩阵。证明矩阵 $B=\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right)$ 也是满秩矩阵。

解：先来说一下满秩矩阵。满秩矩阵的概念其实我在房间 **201** 中已经给大家介绍过了，现在我再说一遍。满秩矩阵一定是方阵，也就是说满秩矩阵的行数和列数相等。我们把秩等于行数（列数）的方阵称为满秩矩阵。比如，一个四行四列的矩阵，如果它是满秩矩阵，则说明该矩阵的秩为 **4**。当然，一个秩为 **3** 的满秩矩阵一定是一个三行三列的矩阵。对于不是方阵的矩阵，根本不存在满秩或不满秩的这种表达，只能说它的秩为多少。

现在我们来看此题，当同学们第一眼看到这道题时，脑子里是否想起了什么?还记得第 1 章吗？第 1 章一共有四个房间，还记得房间 104 讲的是什么吗?忘了的话就翻回去看看。根据房间 104，得：

$$B=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

现在计算一下矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 所对应的行列式 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}$ 的值。

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=1+0+1-0-0-0=2\neq 0$$

根据房间 201（第一个大总结）可知：一个矩阵所对应的行列式不为 0 的充分必要条件是该矩阵可逆。因此，矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 是可逆矩阵。

根据第 2.10.1 节（可逆矩阵与初等矩阵的关系）：

$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=P_1P_2\cdots P_n$，其中 P_1、P_2、…、P_n 均为初等矩阵。则：

$$B=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)P_1P_2\cdots P_n$$

根据第 2.10.2 节（初等矩阵与初等变换的关系）：

“$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)P_1P_2\cdots P_n$”相当于给 $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$ 进行了很多次初等列变换。

根据本节（初等变换与矩阵的秩的关系）：

所以 $B=\left(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\right)P_1P_2\cdots P_n$ 的秩与 $\left(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\right)$ 的秩是一样的。由于 $\left(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\right)$ 是三阶方阵且题中说 $\left(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\right)$ 是满秩的，可知 $A=\left(\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}\right)$ 的秩等于 3，即 $r(A)=3$。所以 $r(B)=3$，又因为 B 是三阶方阵，所以 B 是满秩矩阵。

2.10.4　初等矩阵的逆矩阵

前面刚刚讲完，一个可逆矩阵可以写为若干个初等的乘积。现在要讲的知识点与之毫无关系，我现在要讲的知识点是：初等矩阵本身一定是可逆矩阵，并且要告诉大家如何快速求出初等矩阵的逆矩阵。

首先先请大家接受一个事实：初等矩阵必为可逆矩阵。这一点我在这里不予证明，我想要讲的是，如何快速求出初等矩阵的逆矩阵。我在之前早已讲过，求一个矩阵的逆矩阵的方法是利用公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^*$ 来求。**然而，对于初等矩阵来说，求其逆矩阵根本不用这么麻烦。**同学们可能此时已经迫不及待地想知道到底有什么快捷的方法求初等矩阵的逆矩阵，别急，我马上就说。

我们知道初等矩阵是单位矩阵 E 经过一次初等变换后得到的，而初等变换可以分为以下三种：互换两行（列），以 $k(k\neq 0)$ 乘以某行（列），某行（列）乘以 k 后加到另一行（列）。因此，初等矩阵也分为如下三种。

第一种初等矩阵表示为 E_{ij}，意思是它是单位矩阵 E 经过互换第 i、j 两行（或互换第 i、j 两列）所得到的。

例. 三阶矩阵 E_{12} 为 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

第二种初等矩阵表示为 $E_i(k)$，意思是它是单位矩阵 E 经过第 i 行（或第 i 列）乘以 k 所得到的。

例. $E_2(3)$ 为：$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

第三种初等矩阵表示为 $E_{ij}(k)$，意思是它是单位矩阵 E 经过第 i 行（或第 j 列）乘以 k 后加到第 j 行（或第 i 列）所得到的。

例. 三阶矩阵 $E_{12}(3)$ 为：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

好, 通过以上讲解，我们了解了初等矩阵分为三类，下面来讲解每一类初等矩阵的逆矩阵的求法。

（1）$\left[E_{ij}\right]^{-1} = E_{ij}$

例. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（2）$\left[E_i(k)\right]^{-1} = E_i(\frac{1}{k})$

例. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（3）$\left[E_{ij}(k)\right]^{-1} = E_{ij}(-k)$

例. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.10.5 等价矩阵

同型矩阵的定义：如果矩阵 A 有 **m** 行 **n** 列，矩阵 B 也有 **m** 行 **n** 列，则称矩阵 A 与矩阵 B 是同型矩阵。

例. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\\9&10\end{pmatrix}$ 是同型矩阵。

等价矩阵的定义：如果矩阵 A 和矩阵 B 是同型矩阵，并且 $r(A)=r(B)$（矩阵 A 的秩与矩阵 B 的秩相等），则称矩阵 A 和矩阵 B 是等价矩阵。由等价矩阵的定义可知，等价矩阵一定是同型矩阵，而同型矩阵则不一定是等价矩阵。矩阵 A 和矩阵 B 是等价矩阵记作：$A\cong B$ 。

等价矩阵还有一个充分必要条件。 $A\cong B\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P、Q，使 $PAQ=B$ 。

考研题 2.9　设 n 阶矩阵 A 与 n 阶矩阵 B 等价，则有_______。

（A）$|A|=a\neq 0$，则 $|B|=a$；

（B）$|A|=a\neq 0$，则 $|B|=-a$；

（C）$|A|=a\neq 0$，则 $|B|=0$；

（D）$|A|=0$，　则 $|B|=0$；

解：由于矩阵 A 和矩阵 B 是等价矩阵，根据本节中等价矩阵的充分必要条件，存在可逆矩阵 P、Q，使得 $PAQ=B$ 。两边取行列式得：

$$|PAQ|=|B|$$

根据房间 103 中的“抽象行列式的计算”中的公式⑤，可得：

$$|P||A||Q|=|B|$$

由于 P、Q 为可逆矩阵，根据房间 201（第一个大总结），得：

$$|P|\neq 0,\quad |Q|\neq 0$$

现在观察四个选项，只有（D）成立。此题选（D）。

2.11 房间 208——分块矩阵以及一些知识点的深化

2.11.1 分块矩阵

在考研数学线性代数学科中，分块矩阵是很常用的。分块矩阵指的是用若干横线和纵线把一个矩阵分成若干小块，每一小块称为原矩阵的子矩阵。原矩阵称为分块矩阵。

例. $A=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$，其中 $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$，$B_3=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$，$B_4=\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$。矩阵 A 就是一个分块矩阵。

例. $A=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$，其中 $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$，$B_3=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$，$B_4=2$。矩阵 A 就是一个分块矩阵。

例. $A=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix}$，其中 $B_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$，$B_2=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 9 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$。矩阵 A 就是一个分块矩阵。

通过以上三个例子，我们可以很明显地看出来这样一件事情：**同样一个矩阵，可以以不同的形式对其进行分块，而且即使分块的形式相同，每一块也可以不一样。**

我们在第 1 章讲到的矩阵的向量表示法其实就是矩阵的一种分块形式。

2.11.2　反对称矩阵

之前我已经给大家介绍过反对称矩阵，那为什么本节还要讲反对称矩阵呢？看看房间 208 的题目是：分块矩阵以及一些知识点的深化，本节就属于“知识点的深化”。

具体来说，在这一小节中，我将给大家总结一下证明某矩阵是反对称矩阵的方法。证明某矩阵是反对称矩阵一共有两种方法。

方法 1：证明 $A^T=-A$

考研题 2.10　设 A 是 n 阶矩阵，$E+A$ 是可逆矩阵，记 $f(A)=(E-A)(E+A)^{-1}$，若 A 满足条件 $AA^T=E$，证明 $f(A)$ 是反对称矩阵。

解：$\left[f(A)\right]^T=\left[(E-A)(E+A)^{-1}\right]^T$　　**（1）式**

根据房间 205（关于矩阵的转置的四个公式），结合（1）式，得：

$\left[f(A)\right]^T=\left[(E+A)^{-1}\right]^T(E-A)^T=\left[(E+A)^{-1}\right]^T(E^T-A^T)$　　**（2）式**

由于 $E^T=E$，结合（2）式，得：

$\left[f(A)\right]^T=\left[(E+A)^{-1}\right]^T(E-A^T)$　　**（3）式**

根据房间 206（关于矩阵可逆的六个公式），结合（3）式得：

$\left[f(A)\right]^T=\left[(E+A)^T\right]^{-1}(E-A^T)$　　**（4）式**

根据房间 205（关于矩阵的转置的四个公式），结合（4）式得：

$\left[f(A)\right]^T=\left[E^T+A^T\right]^{-1}(E-A^T)$　　**（5）式**

由于 $E^T=E$，结合（5）式得：

$\left[f(A)\right]^T=\left[E+A^T\right]^{-1}(E-A^T)$　　**（6）式**

由于此题的已知条件中有：$AA^T=E$，而我们知道 $AA^{-1}=E$，所以 $A^T=A^{-1}$，结合（**6**）式，得：

$$\left[f(A)\right]^T=\left[E+A^{-1}\right]^{-1}(E-A^{-1})$$ （**7**）式

由于 $E=A^{-1}A$， $A^{-1}=A^{-1}E$（任何矩阵左乘或右乘单位矩阵 E 还等于它本身），结合（**7**）式，得：

$$\left[f(A)\right]^T=\left[A^{-1}A+A^{-1}E\right]^{-1}(A^{-1}A-A^{-1}E)$$ （**8**）式

根据房间 **203**（矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律），结合（**8**）式得：

$$\left[f(A)\right]^T=\left[A^{-1}\left(A+E\right)\right]^{-1}A^{-1}(A-E)$$ （**9**）式

根据房间 **206**（关于矩阵可逆的六个公式），结合（**9**）式得：

$$\left[f(A)\right]^T=\left(A+E\right)^{-1}AA^{-1}(A-E)$$ （**10**）式

根据房间 **203**（矩阵乘法满足结合律），结合（**10**）式得：

$$\begin{aligned}\left[f(A)\right]^T&=(A+E)^{-1}\left(AA^{-1}\right)(A-E)\\&=(A+E)^{-1}E(A-E)\\&=(A+E)^{-1}(A-E)\\&=-(A+E)^{-1}(E-A)\end{aligned}$$ （**11**）式

根据房间 **204**（几个特殊矩阵相乘是可以交换的），结合（**11**）式得：

$$\left[f(A)\right]^T=-(E-A)\left(A+E\right)^{-1}$$ （**12**）式

由于此题的已知条件中有 $f(A)=(E-A)\left(E+A\right)^{-1}$，结合（**12**）式得：

$$\left[f(A)\right]^T=-f(A)$$

所以 $f(A)$ 为反对称矩阵。

此题是考研中的一道较复杂的题，难在计算上。

方法 2：证明 $a_{ij}=-a_{ji}$

考研题 2.11 设 A 是 n 阶矩阵，若对任意的 $\vec{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，都有 $\vec{X}^T A\vec{X}=0$，证明 A 是反对称矩阵。

解：设 n 阶矩阵 A 为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

由于此题的已知条件中说了，对任意的 $\vec{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，都有 $\vec{X}^T A\vec{X}=0$。那么不妨取：

$$\vec{X}_i=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)^T \text{。}$$

注：在列向量 $\vec{X}_i$ 中除了第 i 行是 1 以外，其余行都是 0。

则有：

$$\vec{X}_i^T A\vec{X}_i=a_{ii}=0$$

不妨再取 $\vec{P}=(0,0,\cdots,1,\cdots,1,\cdots,0)^T$。

注：在列向量中除了第 i 行和第 j 行是 1 以外，其余行都为 0。

则有：

$$\begin{aligned}\vec{P}^T A\vec{P} &= (\vec{X}_i+\vec{X}_j)^T A(\vec{X}_i+\vec{X}_j) \\ &= \left(\vec{X}_i^T+\vec{X}_j^T\right)A(\vec{X}_i+\vec{X}_j)\end{aligned}$$

根据房间203，矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律。

$$\begin{aligned}&= \vec{X}_i A\vec{X}_i^T+\vec{X}_i^T A\vec{X}_j+\vec{X}_j^T A\vec{X}_i+\vec{X}_j^T A\vec{X}_j \\ &= a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj} \\ &= 0\end{aligned}$$

由于 $a_{ii}=a_{jj}=0$，所以有：$a_{ij}+a_{ji}=0$，即 $a_{ij}=-a_{ji}$。所以矩阵 A 是反对称矩阵。

2.11.3 求一个矩阵的逆矩阵

本节和上一节一样，也属于“知识点的深化”。之前我只讲过利用公式法来求矩阵的逆矩阵，本节将告诉大家：其实一共有四种方法可以求一个矩阵的逆矩阵。

方法 1

利用公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^*$（之前早就讲过此方法）。

考研题 2.12 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解：用公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^*$，其中 A^* 称为矩阵 A 的伴随矩阵。

先算 $|A|$，$|A|=\begin{vmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=-2\neq 0$，根据房间 201（第一个大总结），可以知道矩阵 A 的确是可逆矩阵，再算 A^*。

$A_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=1$，　$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-1$，　$A_{13}=\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=3$，　$A_{22}=\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=-1$，　$A_{23}=-\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-2$

$A_{31}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5$，　$A_{32}=-\begin{vmatrix}0&-1\\1&2\end{vmatrix}=-1$，　$A_{33}=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-2$

令 $B=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}$，则 $A^*=B^T=\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$

则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^{*}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$。

方法 2

利用初等行变换或初等列变换，即：

$$\left[A\mid E\right]\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left[E\mid A^{-1}\right]\text{或}\begin{bmatrix}A\\ E\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{bmatrix}E\\ A^{-1}\end{bmatrix}。$$

此方法以前没有讲过，现在我结合下面的例题来给大家讲解。这是求一个矩阵的逆矩阵最常用的方法。

考研题 2.13　设 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

解：采用初等行变换或采用初等列变换都可以。如果我们想采用初等行变换，那么就在原矩阵右侧写一个与原矩阵同阶的单位矩阵；如果我们想采用初等列变换，那么就在原矩阵下侧写一个与原矩阵同阶的单位矩阵。此题我们采用初等行变换来做（当然，本题采用初等列变换来做也是可以的），又因为原矩阵为三阶方阵，因此我们在其右侧写一个三阶的单位矩阵 E。

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

然后，我们只能采用初等行变换——即互换两行，某行乘以 k（$k\neq 0$），某行乘以 k 加到另外一行。当我们把矩阵 B 的左侧化为单位矩阵 E 后，则右侧即为 A^{-1}。

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{互换第一、二行}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第一行}\times 1\text{加到第三行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行}\times(-2)\text{加到第一行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第三行}\times 1\text{加到第二行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行}\times\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第二行}\times(-1)\text{加到第一行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

此时左侧已经是单位矩阵E了，所以：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}。$$

与采用方法 **1** 做出的答案对比一下，可以看出结果是一样的。我要说明一点，在使用方法 **2** 时，虽然每位同学进行初等变换的过程都会不同，但最后的答案一定是一样的。当然，此题也可以将单位矩阵 **E** 写在原矩阵下侧，然后用初等列变换来做，有兴趣的同学可以做一下。

方法 3

利用定义式 $AA^{-1}=E$ 来求一个矩阵的逆矩阵（用于矩阵没有被直接给出的题）。

考研题 2.14 设 n 阶矩阵A满足$A^2+2A-3E=O$，（1）证明A，$A+2E$，$A+4E$可逆，并求它们的逆；（2）当$A\neq E$时，判断$A+3E$是否可逆，并说明理由。

（1）解：$A^2+2A-3E=O$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow A^2+2AE-3E=O\\&\Rightarrow A\times A+A\times 2E-3E=O\\&\Rightarrow A(A+2E)-3E=O\\&\Rightarrow A(A+2E)=3E\\&\Rightarrow A\times\frac{(A+2E)}{3}=E\end{aligned}$$

所以矩阵 A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{A+2E}{3}$

$$\Rightarrow \frac{A}{3}\times\left(A+2E\right)=E$$

所以矩阵 $A+2E$ 可逆，且 $\left(A+2E\right)^{-1}=\dfrac{A}{3}$

由于 $A^2+2A-3E=O$，所以 $A^2+2A-8E=-5E$。

而 $A^2+2A-8E=(A+4E)(A-2E)$。也就是说，$(A+4E)(A-2E)=-5E$。所以矩阵 $A+4E$ 可逆，且 $(A+4E)^{-1}=\dfrac{A-2E}{-5}$。

（2）$A\neq E$ 时，$A-E\neq O$。

由于 $A^2+2A-3E=O$，因式分解得：$\left(A+3E\right)\left(A-E\right)=O$。现在把矩阵 $(A-E)$ 以列分块，即令 $\left(A-E\right)=\left(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n\right)$。其中的每一列都是齐次方程组 $\left(A+3E\right)\vec{X}=\vec{0}$ 的解，而 $(A-E)$ 不是零矩阵，说明 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_n$ 中至少有一个向量不为 $\vec{0}$，即齐次方程组 $\left(A+3E\right)\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解。根据房间 201（第一个大总结）有：矩阵 $(A+3E)$ 不是可逆矩阵。

方法 4

若 $A=P_1P_2\cdots P_n$，其中 $P_1,P_2,...,P_n$ 均为可逆矩阵，则 A 为可逆矩阵，且 $A^{-1}=P_n^{-1}P_{n-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}$。也就是说，当某矩阵可以表示为若干可逆矩阵的乘积时，则该矩阵为可逆矩阵。

考研题 2.15 设 A、B 是同阶可逆方阵，且 $A^{-1}+B^{-1}$ 是可逆矩阵，证明 $A+B$ 是可逆矩

阵，并求 $(A+B)^{-1}$。

解：

$$
\begin{aligned}
&A+B\\
&=AE+EB\\
&=AE+AA^{-1}B\\
&=A(E+A^{-1}B)\\
&=A(B^{-1}B+A^{-1}B)\\
&=A(B^{-1}+A^{-1})B
\end{aligned}
$$

由本题的已知条件可知 A、B、$B^{-1}+A^{-1}$ 均为可逆矩阵，所以 $A+B$ 为可逆矩阵。

$$(A+B)^{-1}=\left[A\left(B^{-1}+A^{-1}\right)B\right]^{-1}=B^{-1}\left(B^{-1}+A^{-1}\right)^{-1}A^{-1}$$

2.11.4 特殊分块矩阵的逆矩阵

针对三种特殊的分块矩阵，人们总结出了求其逆矩阵的方法。下面我分别进行介绍。

第一种特殊的分块矩阵（对角块矩阵）的逆矩阵求法

设：$A=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$

其中 A_1,A_2 都是矩阵 A 的子矩阵，且是方阵。矩阵 O 也是矩阵 A 的子矩阵，但不一定是方阵，矩阵 O 中的每一个数均为 **0**。若 $|A|\neq 0$，则 A 可逆。

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$$

例. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}。

解：将 A 写为分块矩阵的形式。$A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$。

通过计算得出：

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix},\quad C^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

第二种特殊的分块矩阵（反对角块矩阵）的逆矩阵求法

设 $A=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$，其中 A_1、A_2 都是矩阵 A 的子矩阵，且是方阵。矩阵 O 也是矩阵 A 的子矩阵，但不一定是方阵，矩阵 O 中的每一个数均为 **0**。若 $|A|\neq 0$，则 A 可逆。

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}$$

例. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}？

解：将 A 写为分块矩阵的形式。$A=\begin{pmatrix} O & B \\ C & O \end{pmatrix}$，其中 $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$。

通过计算得出：

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}，C^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$所以 A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

第三种特殊的分块矩阵（二阶三角块矩阵）的逆矩阵求法

$$A=\begin{pmatrix} B_{m\times m} & D \\ O & C_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} B_{m\times m} & O \\ D & C_{n\times n} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} O & B_{m\times m} \\ C_{n\times n} & D \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} D & B_{m\times m} \\ C_{n\times n} & O \end{pmatrix}$$

二阶三角块矩阵共有以上四种，我拿其中一种举例，说一下二阶三角块矩阵的逆矩阵

该如何去求。剩下三种，方法完全一样。注意，在以上四个式子中，矩阵B和矩阵C必须都是可逆的。也就是说$|B|\neq 0$，$|C|\neq 0$。否则的话，矩阵A就不是可逆矩阵，也就不存在A^{-1}了。下面我通过一道考研题来给大家讲解。

考研题 2.16　已知分块矩阵$A=\begin{pmatrix} B_{m\times m} & O \\ D & C_{n\times n}\end{pmatrix}$，矩阵$B$和矩阵$C$均为可逆矩阵，求$A^{-1}$。

解：设$A^{-1}=\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W\end{pmatrix}$，由定义：

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} B & O \\ D & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E\end{pmatrix},$$

根据矩阵乘法法则，得出：

$$\begin{aligned} & BX+OZ=E \\ \Rightarrow\ & BX=E && (1)\text{式} \\ & BY+OW=O \\ \Rightarrow\ & BY=O && (2)\text{式} \\ & DX+CZ=O && (3)\text{式} \\ & DY+CW=E && (4)\text{式} \end{aligned}$$

由（1）式直接可得：$X=B^{-1}$。

再来看（2）式，由于矩阵B为可逆矩阵（这是已知条件），根据房间 201（第一个大总结），方程组$B\vec{X}=\vec{0}$有唯一零解。而$BY=O$，如果把矩阵Y以列分块，那么Y的每一列都是齐次方程组$B\vec{X}=\vec{0}$的解。但是我刚才说了，方程组$B\vec{X}=\vec{0}$有唯一零解，所以Y的每一列都是零向量，合起来就是零矩阵，即$Y=O$（注意，千万不能由$BY=O$直接得$Y=O$，因为两个非零矩阵相乘很可能等于零矩阵）。

我们现在看来（3）式，（3）式是$DX+CZ=O$，已经算出$X=B^{-1}$了，因此$DB^{-1}+CZ=O$，移项得：$CZ=-DB^{-1}$。由于题目中说了，矩阵 C 为可逆矩阵，所以C^{-1}存在。等式两侧同时左乘C^{-1}得$C^{-1}CZ=-C^{-1}DB^{-1}$。由于$C^{-1}C=E$，而$EZ=Z$，所以$Z=-C^{-1}DB^{-1}$。

最后我们来看（4）式。（4）式是 $DY+CW=E$，由于已经算出 $Y=O$，因此有 $CW=E$，即

$$\vec{a}^T\vec{a}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=6$$

所以：

$$B^n=6^{n-1}\vec{a}^T\vec{a}$$
$$=6^{n-1}B$$

$$=6^{n-1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 1 & -2\\2 & -2 & 4\end{pmatrix}。$$

考研题 2.18 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T,\vec{\beta}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}^T$，$A=\vec{a}\vec{\beta}^T$，求 A^n？

解：此题与上一道题用的解题方法完全一样。而且此题比上一道题还简单。简单之处在于：此题根本不用你自己找基准，找每行是基准的多少倍，题目中已经明确地为你分解好了，$A=\vec{a}\vec{\beta}^T$。因此：

$$A^n=\overbrace{\left(\vec{a}\vec{\beta}^T\right)\left(\vec{a}\vec{\beta}^T\right)\cdots\left(\vec{a}\vec{\beta}^T\right)}^{n个}$$

由于矩阵乘法满足结合律，意味着可以将扩号加在任何位置，所以：

$$A^n=\vec{a}\overbrace{\left(\vec{\beta}^T\vec{a}\right)\left(\vec{\beta}^T\vec{a}\right)\cdots\left(\vec{\beta}^T\vec{a}\right)}^{n-1个}\vec{\beta}^T$$

而$\vec{\beta}^T\vec{a}$是行向量乘以列向量，因此$\vec{\beta}^T\vec{a}$是一个数而不是一个矩阵。该数为：

$$\vec{\beta}^T\vec{a}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3$$

所以：

$W = C^{-1}$。

综上所述 $X = B^{-1}$，$Y = O$，$Z = -C^{-1}DB^{-1}$，$W = C^{-1}$，

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$。

2.11.5 求一个矩阵的若干次幂

求一个矩阵的若干次幂一共有四种方法 。

方法 1

真的去乘，然后观察规律即可。

例. 求$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{100}$

解：先算$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2}$，即$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$。

通过计算可得：

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$。

继续算$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{3}$，通过计算可得：$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{3} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

由此可得：$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$。有的同学可能会想，二次幂和三次幂虽然符合这个规律，但是 100 次幂不一定啊。首先，能这么想非常好，然后，我告诉你，在你计算二次幂和三次幂时你就会发现，乘完后的第一行第一列的数为多少，其实只与它本身相关。乘完后第二行第二列的数也是一样。

方法 2

利用矩阵乘法满足结合律。

考研题 2.17　$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$，求 B^n。

解：观察一下该矩阵，发现每行都是同一个基准 $(1,-1,2)$ 的倍数。第一行是该基准乘以 **1**，第二行是该基准乘以**-1**，第三行是该基准乘以 **2**。满足这种性质的矩阵，就可以写为一个列向量乘以一个行向量的形式（需要注意的是，虽然一个 **n** 维列向量乘以一个 **n** 维行向量在形式上肯定等于一个 **n** 阶方阵，这一点我在房间 **202** 中介绍过，但反过来说就不对了。也就是说，并不是所有的 **n** 阶方阵都可以写为一个 **n** 维列向量与一个 **n** 维行向量相乘的形式，只有像本题这样的方阵才可以写为一个 **n** 维列向量与一个 **n** 维行向量相乘的形式）。其中，列向量中的数为基准的倍数，行向量即为基准。

因此此题：

$$B=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}(1,-1,2)=\vec{a}\,\vec{a}^T\text{，其中 }\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}。$$

解：列向量之所以为 $\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$，是因为在矩阵 B 中，第一行为基准 $(1,-1,2)$ 乘以 1，第二行为基准 $(1,-1,2)$ 乘以-1，第三行为基准 $(1,-1,2)$ 乘以 2。

则 $B^n=\overbrace{\left(\vec{a}\,\vec{a}^T\right)\left(\vec{a}\,\vec{a}^T\right)\cdots\left(\vec{a}\,\vec{a}^T\right)}^{n\text{个}}$

由于矩阵乘法满足结合律，意味着可以将括号加在任何位置，所以：

$$B^n=\vec{a}\overbrace{\left(\vec{a}^T\,\vec{a}\right)\left(\vec{a}^T\,\vec{a}\right)\cdots\left(\vec{a}^T\,\vec{a}\right)}^{(n-1)\text{ 个}}\vec{a}^T$$

而 $\vec{a}^T\,\vec{a}$ 是行向量乘以列向量，因此 $\vec{a}^T\,\vec{a}$ 是一个数而不是一个矩阵。该数为：

$$A^n = 3^{n-1}\vec{a}\vec{\beta}^T$$
$$= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}。$$

方法 3

将矩阵 A 写为 $A=(kE+B)$ 的形式，然后利用二项式定理。

考研题 2.19　设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，计算 A^n 。

解：此题用方法 1 做不了，因为根本找不出规律。此题用方法 2 也做不了，因为找不出基准。像这样的题就应该用方法 3 来做。

$$A = 1\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

记 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=B$ ，则：

$$A = 1E + B$$
$$A^n = (1E+B)^n$$

根据二项式定理，

$$(1E+B)^n = C_n^0(1E)^n B^0 + C_n^1(1E)^{n-1}B^1 + C_n^2(1E)^{n-2}B^2 + \cdots + C_n^n(1E)^0 B^n，$$

大家都有高中的数学基础，高中的排列组合课本有如下公式：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$
$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m}$$
$$C_n^k = C_n^{n-k}$$
$$C_n^n = C_n^0 = 1$$

另外，我要告诉大家的是：任何矩阵的零次幂都等于与之同阶的单位矩阵 E。

现在大家观察一下二项展开式的等式右侧，是不是觉得有很多项。也就是说，你们也许会认为使用二项式定理之后，依然没法算。但事实并非如此，让我们观察矩阵 B。

$$B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},B^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B^1=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ B^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

所以 $B^3,B^4,\cdots,B^n$ 都为 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$。

因此，二项展开式的等式右侧是可以简化的。所以：

$$A^n=\left(E+B\right)^n=C_n^0E^nB^0+C_n^1E^{n-1}B^1$$

由于 $C_n^0=1$、$C_n^1=n$，单位矩阵 E 的任何次幂还等于单位矩阵 E，而 $B^0=E$，所以：

$$\begin{aligned}A^n&=E+nB\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\n&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

这道题就做完了。也许有的同学会这样想：此题的 B 是个特例，从 B 的二次幂以后就是零矩阵了，所以二项式定理的右侧才可以简化。如果 B 没这么特殊怎么办？我的回答是：**不会出那样的题。**

方法 4

将所给矩阵分块后，结合使用方法 1、方法 2 和方法 3。

考研题 2.20 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，计算 A^n。

解：设：

$$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

则 $A=\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$

使用方法 1。

$$A^2=\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^2 & O \\ O & C^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} B^2 & O \\ O & C^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B^3 & O \\ O & C^3 \end{pmatrix}$$

所以 $A^n=\begin{pmatrix} B^n & O \\ O & C^n \end{pmatrix}$，因此，我们只要计算出 B^n 和 C^n 即可。

为了求 B^n，我们使用方法 2。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，记 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\vec{a}$，则 $B=\vec{a}\vec{a}^T$ 。

$$B^n=\overbrace{\left(\vec{a}\vec{a}^T\right)\left(\vec{a}\vec{a}^T\right)\cdots\left(\vec{a}\vec{a}^T\right)}^{n个}$$

$$=\vec{a}\overbrace{\left(\vec{a}^T\vec{a}\right)\left(\vec{a}^T\vec{a}\right)\cdots\left(\vec{a}^T\vec{a}\right)}^{(n-1)个}\vec{a}^T$$

由于 $\vec{a}^T\vec{a}=2$，所以：

$$B^n=2^{n-1}\vec{a}\vec{a}^T=2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

为了求 C^n，我们使用方法 3。C^n 其实我们已经在上一道题中使用方法 3 计算过了。

$$C^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

所以：$A^n=\begin{pmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0\\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & n & 1\end{pmatrix}$。

就这样房间 208（共包含五个小节）已经讲完了。

2.12 小　结

线性代数大楼的第二层盖完了。现在，我们已经拥有属于自己的二层小楼了，请看：



在这一章中，我首先介绍了初等变换及初等矩阵的概念，并在此基础上讲了一个非常重要的知识点：矩阵的秩。这些是为盖楼所运来的砖，是基础。

紧接着我讲了两个大总结，这两个大总结中所涉及的知识点几乎可以贯穿全书。矩阵乘法满足结合律，矩阵乘法对于矩阵加减法满足分配律也是不容忽视的知识点。然而，矩阵乘法却不满足交换律，本章只是介绍了几个可交换的特例。

再之后，我给大家介绍了与转置和可逆有关的公式，在这两组公式中，特别需要注意的是$(AB)^T=B^TA^T$以及$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，等式右侧是先B后A。

在最后的两个房间中，我给大家介绍了可逆矩阵与初等矩阵之间的联系和分块矩阵的

相关概念。

2.13　练 习 题

1.选择题

（1）A，B 是 n 阶矩阵，满足 $AB=O$，且 $B\neq O$，则必有________。

（A）$(A+B)^2=A^2+B^2$　　　　（B）$|B|\neq 0$

（C）$|B^*|=0$　　　　（D）$|A^T|=0$

解：

（A）：我之前从没讲过这样的公式，但此时还不能确定它就一定是错的。我们只能举个例子看一下。

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，则：

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$$

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2\neq A^2+B^2$$

所以（A）选项不能选。

（B）：难道 $B\neq O$，矩阵 B 所对应的行列式 $|B|$ 就一定不等于 0 吗？当然不是，比如：

设 $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$，$B$ 不是零矩阵吧，但 $|B|=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=4-4=0$。

所以（B）选项不能选。

（C）：根据第 1 章房间 103 中的公式，有 $|B^*|=|B|^{n-1}$，所以（C）选项的意思是 $|B|^{n-1}=0$。也就是说，$|B|=0$，这显然不对。

比如 $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$|B|=4-6=-2\neq 0$。

所以（C）选项不能选。

（D）：由于 $AB=O$，又 $B\neq O$。说明了这样一个问题：若将矩阵 B 以列分块，即 $B=\left(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n\right)$，则 $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\cdots,\vec{\beta}_n$ 中至少有一个列向量不是零向量。我在之前讲过，B 的每一个列向量都是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解向量。因此，说明齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解。根据房间 201（第一个大总结），得出 $|A|=0$。再根据第 1 章中讲的行列式的性质，得 $\left|A^T\right|=|A|=0$。

所以本题应选择：（D）。

（2）A，B 均是 n 阶可逆矩阵，k（$k\neq 1$）为正整数，则必有__________。

（A）$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$　　（B）$|A+B|=|A|+|B|$

（C）$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$　　（D）$(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$

解：

（A）：一看就是错的，但如果是 $(A+B)^T=A^T+B^T$ 那么就是正确的。反例请同学们自己找一个，遍地都是。

（B）：此选项考的是把一个行列式写为两个行列式相加的形式。的确，一个行列式可以拆成两个行列式相加的形式，这在第 1 章中讲过，但是只能按照一行或一列来拆，不能像本选项这么拆。所以（B）选项不能选。要是想举反例也相当容易。

设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$|A+B|=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=4-1=3$

$|A|+|B|=1+0=1$

$|A+B| \neq |A|+|B|$

（C）：根据房间 206 的公式，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。所以（C）选项不能选。

（D）：

$$
\begin{aligned}
&\text{左侧}\\
&=\left(A^k\right)^{-1}\\
&=\left(\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k\text{个}}\right)^{-1}\\
&\text{根据房间206中的公式，}\\
&=\underbrace{\left(A^{-1}\right)\times\left(A^{-1}\right)\times\cdots\times\left(A^{-1}\right)}_{k\text{个}}\\
&=\left(A^{-1}\right)^k\\
&=\text{右侧}
\end{aligned}
$$

所以本题应选择：（D）。

（3）设 A 是 n 对称阵，B 是 n 阶反对称阵，则下列矩阵为反对称阵的是________。

（A）$AB-BA$　　（B）$AB+BA$

（C）$(AB)^2$　　（D）BAB

解：大家还记得对称阵和反对称阵是什么意思吗？如果记得，那很好，如果忘记了，也没有关系，我来帮大家复习一下：**若 $A^T=A$，则称矩阵 A 为对称矩阵（对称阵）；若 $A^T=-A$，则称矩阵 A 为反对称矩阵（反对称阵）**。本题的已知条件中说 A 是对称阵，所以有 $A^T=A$；B 是反对称阵，所以有 $B^T=-B$。

（A）选项：

$$
\begin{aligned}
&(AB-BA)^T \\
&=(AB)^T-(BA)^T \\
&=B^TA^T-A^TB^T \\
&=-BA+AB \\
&=AB-BA
\end{aligned}
$$

说明 $AB-BA$ 为对称矩阵，并非反对称矩阵。本题让选的是反对称矩阵，所以不能选（A）。

（B）选项：

$$
\begin{aligned}
&(AB+BA)^T \\
&=\left(AB\right)^T+\left(BA\right)^T \\
&=B^TA^T+A^TB^T \\
&=-BA-AB \\
&=-(BA+AB) \\
&=-(AB+BA)
\end{aligned}
$$

说明 $AB+BA$ 为反对称矩阵，所以此题选（B）。

（C）选项：

$$
\begin{aligned}
&\left[(AB)^2\right]^T \\
&=\left[(AB)\times(AB)\right]^T \\
&=\left(AB\right)^T\times\left(AB\right)^T \\
&=(B^TA^T)\times(B^TA^T) \\
&=(-BA)\times(-BA) \\
&=(-1)^2(BA)^2 \\
&=(BA)^2
\end{aligned}
$$

说明 $(AB)^2$ 既不是对称矩阵，也不是反对称矩阵，所以不能选（C）。

（D）选项：

$$
\begin{aligned}
&(BAB)^T \\
&=B^TA^TB^T \\
&=(-B)\times A\times(-B) \\
&=\left(-1\right)^2\times BAB \\
&=BAB
\end{aligned}
$$

说明 BAB 为对称矩阵，并非反对称矩阵。本题让选的是反对称矩阵，所以不能选（C）。

所以本题应选择：（B）。

（4）设 $A=E-2\vec{a}^T\vec{a}$，其中 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，且 $\vec{a}\vec{a}^T=1$，则 A **不能**满足的结论是________。

（A）$A^T=A$　　（B）$A^T=A^{-1}$　　（C）$AA^T=E$　　（D）$A^2=A$

解：首先，请同学们观察一下这四个选项。（B）选项和（C）选项说得是同一个意思，$A^T=A^{-1}\Leftrightarrow AA^T=E$。所以（B）、（C）要么就都选，要么就都不选。而这是单选题，所以（B）、（C）都不选。我们只用在（A）、（D）之间进行选择就可以了。

（A）选项：

$$
\begin{aligned}
A^T &= \left(E-2\vec{a}^T\vec{a}\right)^T \\
&= E^T-\left(2\vec{a}^T\vec{a}\right)^T \\
&= E-2\left(\vec{a}^T\vec{a}\right)^T \\
&= E-2\vec{a}^T\vec{a} \\
&= A
\end{aligned}
$$

这说明（A）选项是正确的。然而，此题让选的是错误的，所以不能选择（A）选项。

（D）选项：

$$A^2=\left(E-2\vec{a}^T\vec{a}\right)^2$$
$$=\left(E-2\vec{a}^T\vec{a}\right)\times\left(E-2\vec{a}^T\vec{a}\right)$$
$$=E\times E-E\times 2\vec{a}^T\vec{a}-2\vec{a}^T\vec{a}\times E+4\vec{a}^T\vec{a}\vec{a}^T\vec{a}$$
$$=E-2\vec{a}^T\vec{a}-2\vec{a}^T\vec{a}+4\vec{a}^T\left(\vec{a}\vec{a}^T\right)\vec{a}$$
$$=E-4\vec{a}^T\vec{a}+4\vec{a}^T\vec{a}$$
$$=E$$
$$\neq A$$

所以本题应选择：（D）。

2.填空题

（1）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&4&2\\1&-1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-3&1\\0&-1\\4&1\end{pmatrix}$，满足关系 $AX=B$，则 X =________。

解：我们先来计算一下方阵 A 所对应的行列式 $|A|$。

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&4&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=6\neq 0$$

根据房间 20*1*（第一个大总结）可知，矩阵 A 可逆，即 A^{-1} 存在。$AX=B$，等式两侧同时左乘 A^{-1}，得 $A^{-1}AX=A^{-1}B$。

由于 $A^{-1}A=AA^{-1}=E$，所以有 $X=A^{-1}B$。

因此，我们需要计算 A^{-1}。

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-4&1&4\end{pmatrix}$$（计算过程省略）

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -14 & -1 \\ 28 & -1 \end{pmatrix}$$

答案：$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -14 & -1 \\ 28 & -1 \end{pmatrix}$

（2）设 $B = (E + A)(E - A)^{-1}$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $(E + B)^{-1} =$ __________。

解：

$$\begin{aligned} & E + B \\ = & E + (E + A)(E - A)^{-1} \\ = & (E - A)(E - A)^{-1} + (E + A)(E - A)^{-1} \end{aligned}$$

由于矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律，所以：

$$\begin{aligned} & = (E - A + E + A)(E - A)^{-1} \\ & = 2E(E - A)^{-1} \\ & = 2(E - A)^{-1} \end{aligned}$$

所以 $(E + B)^{-1} = \left[2(E - A)^{-1}\right]^{-1}$

根据房间 206 中所讲的公式：

$$
\begin{aligned}
&(E+B)^{-1}\\
&=\left[2(E-A)^{-1}\right]^{-1}\\
&=\frac{1}{2}(E-A)\\
&=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&5\\1&1&1\end{pmatrix}\right]\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&-3\\-2&0&-5\\-1&-1&0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.计算和证明题

（1）设 $A=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$，计算 A^2，证明 $(E+A)$ 可逆，并求 $(E+A)^{-1}$。

解：

$$
\begin{aligned}
A^2&=\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}4&-4&-4&4\\-4&4&4&-4\\-4&4&4&-4\\4&-4&-4&4\end{pmatrix}\\
&=-4A
\end{aligned}
$$

好，本题的第一问我们已经做完了，我们已经求出了 A^2，$A^2=-4A$。下面我们继续，接下来本题让证明矩阵 $(E+A)$ 可逆，并求出它的逆矩阵。在本章的房间 208 中，我给大家总结了四种求某矩阵的逆矩阵的方法。对于本题来说，矩阵 $(E+A)$ 中的数没有明显地给出，所以本题明显是可以用定义法来求矩阵 $(E+A)$ 的逆矩阵。

$$A^2=-4A$$
$$\Rightarrow A^2+4A=O$$
$$\Rightarrow (A+E)\times(A+3E)-3E=O$$
$$\Rightarrow (A+E)\times(A+3E)=3E$$
$$\Rightarrow (A+E)\times\frac{A+3E}{3}=E$$

所以 $A+E$ 可逆，且 $(A+E)^{-1}=\frac{A+3E}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&2&-1&1\\1&-1&2&1\\-1&1&1&2\end{pmatrix}$

（2）设 A、B、$(A+B)$ 这三个矩阵均可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，并求 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$。

解：本题用房间 208 中讲的求某矩阵的逆矩阵的四种方法中的方法 4 来做。

$$\begin{aligned}&A^{-1}+B^{-1}\\&=A^{-1}E+EB^{-1}\\&=A^{-1}E+A^{-1}AB^{-1}\\&=A^{-1}(E+AB^{-1})\\&=A^{-1}(BB^{-1}+AB^{-1})\\&=A^{-1}(B+A)B^{-1}\end{aligned}$$

由于 A、B 可逆，所以 A^{-1}、B^{-1} 也可逆，且 $B+A$ 可逆。根据房间 208 中讲的求某矩阵的逆矩阵的四种方法中的方法 4 可知，$A^{-1}+B^{-1}$ 可逆。

$$\begin{aligned}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}&=\left[A^{-1}(B+A)B^{-1}\right]^{-1}\\&=(B^{-1})^{-1}(B+A)^{-1}(A^{-1})^{-1}\\&=B(B+A)^{-1}A\end{aligned}$$

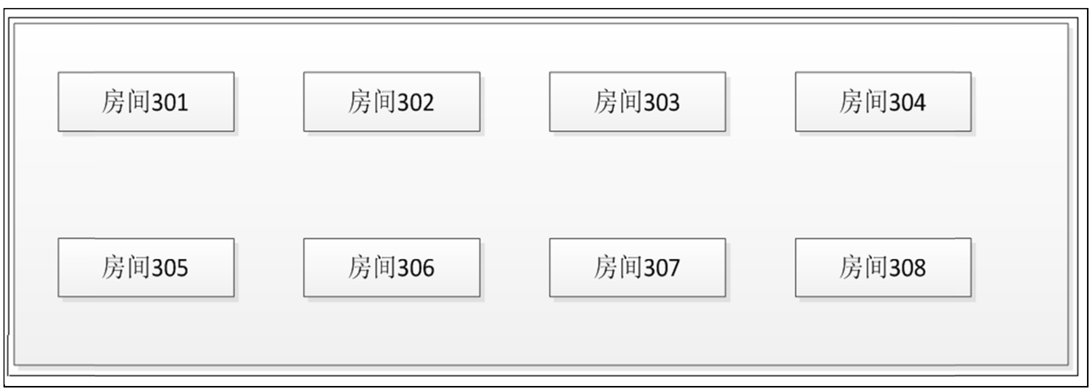
2.14 结尾语

同学们，相信你们每天都在努力复习。我想提醒你们的是：磨刀不误砍柴工，充足的睡眠和适量的运动对你们来说是非常重要的。有的同学早上三四点就起床复习，也有的同学晚上刷夜复习，我并不赞成这种做法。夜里睡不够，第二天白天就要睡，根本没有提高效率。当然，还有人晚上不睡白天也不睡，连续刷夜好几天复习，这样后果将是十分严重的。我认识的一个同学，就是因为连续好几天刷夜复习，白天也不睡，他自己还认为问题不大，认为就考研复习这一段时间而已。结果最后，是考上了，但是由于持续刷夜，导致身体机能出现问题，得了尿毒症，上学也上不了了，要换肾。大家明白了吧，如果不注重身体健康，那么后果将是十分严重的。

“日出而作，日落而息”是我们每个人都应该遵循的自然规律，任何破坏自然规律的行为最终都将反过来伤害我们自己，区别只是来早与来迟罢了。

希望大家能够重视属于自己的健康，保证充足的睡眠和适量的运动，复习时必将事半功倍。

第 3 章　第三层——向量



同学们，你们矩阵都能学得那么好，而从矩阵中抽出一行或一列就是向量。也就是说，向量也是矩阵，只不过是特殊的矩阵罢了，更简单了。你们有理由学不好吗？

3.1 第一车砖——向量与向量组的基本概念

其实在第 1 章，我就已经讲过了向量的概念，并且在之前的很多题目中，我们都用到了向量，因此这里只不过是复习一下而已。

向量分为行向量和列向量两种，同学们只要把它理解为从矩阵中抽出一行或从矩阵中抽出一列即可。

例.

$(1\quad 2\quad 3)$、$(1\quad 5\quad 7)$、$(6\quad 8)$、$(6\quad 10\quad 12\quad 19)$ 等都是行向量。

$(1\quad 2\quad 3)^T$、$(1\quad 5\quad 7)^T$、$(6\quad 8)^T$、$(6\quad 10\quad 12\quad 19)^T$ 等都是列向量。

向量是矩阵，而且是特殊的矩阵。其特殊性体现在：该矩阵的行数或该矩阵的列数为 1。

下面再来介绍一下向量维数的概念。**对于一个行向量来说，它有几列，它就是几维行向量。**例如 $(1\quad 2\quad 3)$、$(1\quad 5\quad 7)$ 是三维行向量，$(6\quad 8)$ 是二维行向量，$(6\quad 10\quad 12\quad 19)$ 是四维行向量；**对于一个列向量来说，它有几行，它就是几维列向量。**例如 $(1\quad 2\quad 3)^T$、$(1\quad 5\quad 7)^T$ 是三维列向量，$(6\quad 8)^T$ 是二维列向量，$(6\quad 10\quad 12\quad 19)^T$ 是四维列向量。

另外，一般来说，**向量不用大写英文字母表示，而是用带箭头的字母**（如 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\ \vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$）**表示**，如：$\vec{\alpha}=(1\quad 5\quad 7)^T$。

了解了向量的基本概念后，我们再来看看向量组是什么意思。**所谓向量组，顾名思义，其实就是一个箱子，里面装着一堆向量而已，很好理解吧。**例如“由 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 所组成的向量组 A”的意思是“向量组 A 中包含三个向量，分别是 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$。”

3.2 第二车砖——线性表出的概念

“线性表出”也叫“线性表示”，是反映**一个**<u>向量</u>与**一个**<u>向量组</u>之间关系的一个专有名词。具体的定义如下。

若向量 $\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha_1}+k_2\vec{\alpha_2}+\cdots+k_n\vec{a_n}$（其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数），则称向量 $\vec{\beta}$ 可由向量组 A

（向量组 **A** 中包含 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{a}_n$ ）线性表出。

例. 向量$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$能否由向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$线性表出？

解：由于$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

所以向量$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$可以由向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$线性表出。

例. 向量$\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\2\end{pmatrix}$，问$\vec{b}$能否由向量组$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$线性表出？

解：由于$\begin{pmatrix}2\\3\\4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$,

所以向量$\vec{b}$可以由向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$线性表出。

3.3　第三车砖——线性相关与线性无关的概念

现在我先来告诉大家一句话：**n** 个维数相同的向量，这 **n** 个向量要么就是线性相关的，要么就是线性无关的，不可能既线性相关又线性无关，也不可能既不线性相关又不线性无关。

那么，线性相关与线性无关到底指的是什么意思呢？设有 **n** 个维数相同的行向量（或列向量）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，现在我来写这样一个等式：$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_n\vec{a}_n=\vec{0}$，其中 k_1、k_2、

…、k_n都是常数。我们知道，当k_1、k_2、…、k_n这 **n** 个常数都为 **0** 时，上述等式一定成立，这毫无疑问，对吧。但是，当k_1、k_2、…、k_n这 **n** 个常数不全为 **0** 时（注意，我说的是不全为 **0** 而不是全不为 **0**），还能使得上述等式成立吗？那就不一定了。

好，由上面这段话，我给大家引出线性相关和线性无关的定义。设有 **n** 个维数相同的行向量（或列向量）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$。若只有当$k_1$、$k_2$、…、$k_n$全为 **0** 才能使等式$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\cdots+k_n\vec{a}_n=\vec{0}$成立，则称向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$线性无关。否则，称向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$线性相关。

例. 设$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$，问向量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$线性相关还是线性无关？

解：设$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2=\vec{0}$

即：$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

即：$k_1+5k_2=0$

$2k_1+6k_2=0$

$3k_1+7k_2=0$

$4k_1+8k_2=0$

只有当k_1、k_2这两个数都为 0 时，等式$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2=\vec{0}$才成立。

所以向量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$是线性无关的。

例. 设 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\\8\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}$，问向量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 线性相关还是线性无关？

解：$k_1\begin{pmatrix}1\\3\\5\\8\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

当 $k_1=0$，$k_2=1$，$k_3=1$ 时，上式成立。

所以向量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 是线性相关的。

例. 设 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，问向量 $\vec{\alpha}$ 线性相关还是线性无关？

解：此题虽然只有一个向量，但判断线性相/无关的方法与前两道题是一样的。

$$k\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

只有当 $k=0$ 时上式成立，所以 $\vec{a}$ 线性无关。

3.4　第四车砖——最大无关组

现在有一个向量组 **A**，这向量组 **A** 中包含了 **n** 个维数相同的行向量（或列向量）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$。这 **n** 个向量是线性相关的还是线性无关的都无所谓。

现在我们从这 **n** 个向量中取出 **r** 个向量，这样的话 **r** 肯定小于等于 **n**，因为总共才 **n** 个嘛。

若我们取的这 **r** 个向量满足如下两个条件，则称这 **r** 个向量所组成的向量组是向量组 **A** 的一个最大无关组。这两个条件是：

- 这 **r** 个向量必须是线性无关的。
- 从剩下的 **n-r** 个向量中任意拿出一个向量，加入到这 **r** 个向量中，所得到的 **r+1** 个向量是线性相关的。

例. 向量组 A 中包含五个向量：$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$。若 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$ 线性无关，$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 线性相关，$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4,\vec{a}_5$ 线性相关，则向量组 B（向量组 B 中包含 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$）就是向量组 A 的一个最大无关组。

通过以上的讲解与例题，大家一定已经明白了最大无关组的概念。我最后强调三点。

（1）最大无关组是一个向量组。

（2）最大无关组不是绝对的概念，而是相对的概念。也就是说，“最大无关组”这五个字不能孤立的存在，一定要说：是哪个向量组的最大无关组。

（3）一个向量组的最大无关组很可能不是唯一的。也就是说，从包含 n 个向量的向量组中，取满足上述两个条件的 r 个向量，很可能有不止一种取法。

3.5 第五车砖——“向量组的秩”的概念

在上一节的最后，我跟大家强调了三点，其中第三点说的是：一个向量组的最大无关组很可能不是唯一的。

现在我要告诉大家的是：**的确，一个向量组的最大无关组很可能不是唯一的，也就是说，一个向量组 A 或许会有很多最大无关组，但是，无论向量组 A 有多少个最大无关组，向量组 A 的每个最大无关组中所包含的向量的个数都是一样的，此个数被称为向量组 A 的秩。**这就是“向量组的秩”的定义。

例. 向量组 A（$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$），向量组 B：（$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_5$），若已知向量组 B 是向量组 A 的一个最大无关组，问：向量组 A 的秩是多少？

解：由于向量组 B 是向量组 A 的一个最大无关组，又因为向量组 B 中包含了三个向量，所以向量组 A 的秩为 3，并且如果向量组 A 还有其他最大无关组，则向量组 A 的其他最大无关组中所包含的向量的个数均为 3。

3.6　第六车砖——

"向量组的秩"与"矩阵的秩"的关系

在第 2 章中，我给大家讲了矩阵的秩，矩阵的秩是通过子式来定义的，而我们刚刚讲的向量组的秩则是通过最大无关组中所包含的向量的个数来定义的。它们的定义虽然看似没有关系，然而它们都是秩，那么这两个秩之间究竟有没有关系呢？有！**矩阵的秩等于向量组的秩。这个等于关系的成立，使得求向量组的秩一般都是转化为求矩阵的秩。**

例. 向量组 A 中包含四个向量：$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\1\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\5\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，问向量组 A 的最大无关组中包含多少个向量？

解：由"向量组的秩"的定义可知，本题问题所问的是向量组 A 的秩。

由于向量组的秩等于矩阵的秩，所以我们通过求矩阵的秩来求出向量组 A 的秩。

设矩阵 $B=\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\right)=\begin{pmatrix}2&0&0&2\\1&2&0&1\\3&-1&0&0\\1&4&5&4\end{pmatrix}$

根据第 2 章讲的矩阵的秩的求法，求出矩阵 B 的秩为 4（过程省略），所以向量组 A 的秩为 4。即向量组 A 的最大无关组中包含四个向量。

这道题就做完了。顺便说一句题外话，由于向量组 A 一共就包含四个向量，因此向量组 A 本身就是向量组 A 的一个最大无关组，并且向量组 A 本身是向量组 A 的唯一的一个最大无关组（之所以唯一，是因为：假设向量组 A 还有别的最大无关组的话，那么，根据"一个向量组的各个最大无关组中包含向量的个数均相等"，可以知道我们假设的那个"别的最大无关组"中也包含四个向量，可是向量组 A 一共就只含四个向量，从四个向量中取四个向量只有唯一的一种取法，所以我们假设的那个"别的最大无关组"根本不存在）。

3.7 第七车砖——线性表出的推广

在前面的第二车砖中，我给大家讲了线性表出的概念。在本节中，我将对线性表出的概念进行推广。如何推广呢？第二车砖中我讲的是“什么叫一个向量可由一个向量组线性表出”，而本节我要讲的是“什么叫一个向量组可由一个向量组线性表出”。

若向量 $\vec{\beta}=k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_n\vec{a}_n$（其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为常数），则称向量 $\vec{\beta}$ 可由向量组 A（向量组 A 中包含 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{a}_n$）线性表出。这是第 3.1 节讲过的。

现在开始讲新的知识。有向量组 B（$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3,\cdots,\vec{b}_n$），有向量组 A（$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\cdots,\vec{a}_n$），若向量组 B 中的**每一个向量**都可以由向量组 A 线性表出，**则称向量组 B 可由向量组 A 线性表出。**

例. 向量组 B 中包含四个向量：$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，$\vec{b}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$，$\vec{b}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$，$\vec{b}_4==\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}$，向量组 A 中包含三个向量：$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$。问向量组 B 能否由向量组 A 线性表出？

解：

先来看 $\vec{b}_1$。

$$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=1\vec{a}_1+2\vec{a}_2+5\vec{a}_3$$

说明 $\vec{b}_1$ 可由向量组 A 线性表出。

再来看 $\vec{b}_2$。

$$\vec{b}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=2\vec{a}_1+5\vec{a}_2+8\vec{a}_3$$

说明 $\vec{b}_2$ 可由向量组 A 线性表出。

接着看 $\vec{b}_3$。

$$\vec{b}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{a}_1+4\vec{a}_2+7\vec{a}_3$$

说明 $\vec{b}_3$ 可由向量组 A 线性表出。

最后看 $\vec{b}_4$。

$$\vec{b}_4=\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=3\vec{a}_1+7\vec{a}_2+2\vec{a}_3$$

说明 $\vec{b}_4$ 可由向量组 A 线性表出。

由于向量组 B 中的每一个向量都可以由向量组 A 线性表出，所以向量组 B 可以由向量组 A 线性表出。

3.8　第八车砖——等价向量组

本节我们讲等价向量组，这也是本章的最后一车砖。**若向量组 A 可由向量组 B 线性表出，向量组 B 也可由向量组 A 线性表出，则称向量组 A 与向量组 B 是等价向量组。**

例. 向量组 A：$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$；向量组 B：$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$。

问：向量组 A 与向量组 B 是否为等价向量组？

解：

$$\vec{b}_1 = 2\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$$

$$\vec{b}_2 = 0\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 + 0\vec{a}_3$$

$$\vec{b}_3 = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$$

说明向量组 B 可由向量组 A 线性表出。

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + 0\vec{b}_3$$

$$\vec{a}_2 = 0\vec{b}_1 + \frac{1}{2}\vec{b}_2 + 0\vec{b}_3$$

$$\vec{a}_3 = 0\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_3$$

说明向量组 A 可由向量组 B 线性表出。

所以向量组 A 与向量组 B 是等价向量组。

关于等价向量组还有以下三点需要说明的：

（1）向量组 **A** 与向量组 **B** 是等价向量组可以推出向量组 **A** 的秩等于向量组 **B** 的秩。

（2）一个向量组的任意两个最大无关组是等价向量组。

（3）一个向量组与它的任意一个最大无关组是等价向量组。

终于把砖运来了

同学们，一定不能丢了砖，不然房间是没办法盖的。这八车砖终于让同学们顺利地运到了建筑工地上，想必同学们已经很累了，但是这是开始而不是结束，开发商最终要看房间盖地怎么样。别忘了，“房间”中的内容，不但要掌握，还要默写直至熟练默写。

3.9　房间 301——关于线性相/无关要记的几个结论

在前面的第三车砖中，我已经讲过了线性相关和线性无关的基本概念，也就是定义。本节要讲的内容是根据线性相关和线性无关的定义直接推导出来的结论，请大家务必掌握。

关于线性相关的结论：<u>单个</u>零向量是线性相关的；包含零向量的向量组是线性相关的；包含相等向量的向量组是线性相关的；包含成比例向量的向量组是线性相关的。

关于线性无关的结论：<u>单个</u>非零向量是线性无关的；<u>两个</u>不成比例的向量是线性无关的；单位向量组（单位矩阵 E 中的所有列向量所组成的向量组）是线性无关的。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 的线性相关性。

解：由于 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 不成比例，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 线性无关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 的线性相关性。

解：由于 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 成比例，$\vec{a}_2=2\vec{a}_1$，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 线性相关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}3\\7\\2\\8\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的线性相关性。

解：由于向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 中包含零向量，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性相关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的线性相关性。

解：由于 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是单位向量组，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 的线性相关性。

解：由于 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 不成比例，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ 线性无关。

例. $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}7\\9\\2\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-4\\-6\\-8\end{pmatrix}$，判断 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的线性相关性。

解：由于向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 中包含成比例的向量，$\vec{a}_3=-2\vec{a}_1$，所以 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性相关。

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}$，判断 $\bar{a}$ 的线性相关性。

解：由于 $\vec{a}$ 是单个非零向量，所以它是线性无关的。

3.10 房间 302——方程组的求解

从标题就可以看出，本节要讲的内容肯定是解方程组的方法。大家可能都还记得，我在第 1 章的第五车砖中讲的“克拉默法则”也是解方程组的方法。那么，本节我要给大家讲的解方程组的方法与“克拉默法则”有什么区别呢？请大家继续往下看。

我在给大家讲“克拉默法则”（第 1 章的第五车砖）时曾说过：并不是所有的方程组都能用克拉默法则进行求解。

对于一个给定的方程组，按如下步骤判断该方程组是否可以用克拉默法则进行求解：

（1）关注所给方程组中每一个方程的形式。具体来说就是：当所给方程组中每一个方程的形式都是：$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$为任意常数）**时，进行第（2）步；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。**

（2）关注所给方程组包含的方程个数与未知数个数。具体来说就是：当所给方程组包含的方程个数等于未知数个数时，进行第（3）步；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。

（3）关注所给方程组对应的系数行列式 D。具体来说就是：当系数行列式 D$\neq 0$**时，此方程组可以用克拉默法则进行求解；否则，此方程组不可以用克拉默法则进行求解。**

现在，我同样要说：并不是所有的方程组都能用本节的方法进行求解。

对于一个给定的方程组，如果它满足以下条件：**方程组中每一个方程的形式都是：**

$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（$a_1,a_2,\cdots,a_n,b$为任意常数）则此方程组可以用本节的方法进行求解。

同学们请注意：关于“本节的方法到底是什么”，我还根本没开始讲呢，上面只是把本节方法的**使用条件**与第 1 章所讲的克拉默法则的**使用条件**做了一下对比而已（因为两者都是解方程组的方法，所以我就把两者的使用条件做了一下对比）。

通过对比，我们可以很明显地发现：在验证一个方程组是否可以用克拉默法则去求解时，需要按顺序验证三件事情；然而，在验证一个方程组是否可以用本节的方法去求解时，只需验证一件事情（三件事情中的第一件）即可。这说明了什么呢？这说明本节的方法和克拉默法则虽然都可以用来解方程组，但是本节的方法的适用范围要比克拉默法则广得多（限制条件越少，应用范围越广）。换句话说就是，能用克拉默法则求解的方程组，一定也能用本节的方法求解，但是，能用本节的方法求解的方程组，可不一定能用克拉默法则求解。

例. 有方程组$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\x_1-3x_2-6x_4=9\\2x_2-x_3+2x_4=-5\end{cases}$，此方程组可以用克拉默法则求解吗？此方程组可以用本节的方法求解吗？

解：此方程组中的每一个方程的形式都是$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，由此我们立刻可以断定此方程组能用本节的方法求解。那么它能不能用克拉默法则来求解呢？我们继续看。此方程组含三个方程，含四个未知数，方程个数不等于未知数个数，因此此方程组不能用克拉默法则求解。

例. 有方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\ x_1-3x_2^2-6x_4=9\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5\end{cases}$，此方程组可以用克拉默法则求解吗？此方程组可以用本节的方法求解吗？

解：此方程组中的每一个方程的形式**并非都是** $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$（第二个方程中出现了 x_2^2），由此我们立刻可以断定此方程组既不能用克拉默法则求解，也不能用本节的方法求解。

例. 有方程组 $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\ x_1-3x_2-6x_4=9\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$，此方程组可以用克拉默法则求解吗？此方程组可以用本节的方法求解吗？

解：此方程组中的每一个方程的形式都是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，由此我们立刻可以断定此方程组能用本节的方法求解。那么它能不能用克拉默法则来求解呢？我们继续看。此方程组含四个方程，含四个未知数，方程个数等于未知数个数，另外，此方程组所对应的系数行列式为：

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27\neq 0$$

所以此方程组也能用克拉默法则求解。

说了这么多，其实我想要表达的仅仅是：克拉默法则是有局限性的，本节所要讲的方法比克拉默法则的适用范围要广。

也就是说，前面这么多都只是引子。接下来，我们开始进入正题。

3.10.1 求齐次方程组的通解

首先要给大家介绍的是“求齐次方程组的通解”的步骤。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并且求出矩阵的秩。

（2）判断解的类型。具体的判断方法如下：

- 若 **r=n**，则该齐次方程组有唯一零解，并且此题已经做完了，不用再进行步骤（3）了。
- 若 **r<n**，则该齐次方程组有非唯一解（也就是非零解、无穷多解），并且需要进行步骤（3）。

注意：其中 **n** 为方程组中所含的未知数的个数（千万别把 **n** 记成是方程个数），**r** 为步骤（1）所求出的矩阵的秩。

（3）计算 **n-r**，设 **n-r=A**，则说明 **n** 个未知数中有 **A** 个可以自由取值，并且取 **A** 组（注意：取的这 **A** 组向量必须线性无关，比如：取的这 **A** 组向量中不能含零向量，不能含相等的向量，不能含成比例的向量），则齐次方程组的通解为 **A** 组向量的任意线性组合。

相信大家看完这三个步骤，对齐次方程组的求解方法依然是云里雾里，这完全在我的预料之中，因为上述语言比较抽象，尤其是步骤（3）。不过无所谓，我这个人有个特点：要不我就把知识点写得特别明白，要不我就把例题讲解得特别明白。因此，如果你没看懂上述的三个步骤，完全不用担心，继续看下面的例题。

考研题 3.1　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0 \end{cases}$$ 的基础解系和通解。

解：咱们先别一上来就套用刚刚讲的三个步骤，得先看看这个方程组到底能不能用本节的方法去求解。

此方程组中的每一个方程的形式都是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，由此我们立刻可以断定此方程组能用本节的方法求解（顺便说一句，此方程组不能用克拉默法则求解，因为方程个数不等于未知数的个数）。

好，确定了此方程组能用本节的方法求解后，我们再继续看。此题的已知条件中明确的写了“齐次”两个字，其实就算不明确 “齐次”两个字，我们也可以知道此方程组是一个齐次方程组，因为每个方程的等号右侧的数全是 0。

好，既然此方程组能用本节的方法求解，并且我们已经确定了此方程组是齐次方程组，那么我们现在就严格按照刚刚讲的三个步骤来求解此方程组。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并且求出矩阵的秩。

矩阵为：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$，

然后求秩，求秩的具体过程我在这里就不详细说了，因为之前已经详细讲过了。此题化阶梯形需要六步。

因为：$2(4-1)=6$。

经过化阶梯形的六个步骤后，系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix}\text{变为了}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以秩为 3，即 r=3。

（2）判断解的类型。

未知数个数 n=5，秩 r=3。由于 r<n，所以此方程组有无穷多解，并且进行第三步。

（3）求解。

n-r=5-3=2，说明五个未知数中有两个未知数可以自由取值并且取两组，那么到底五个未知数中的哪两个未知数可以自由取值呢？（我说五个未知数中有两个未知数可以自由取值，但我可没说是五个中任意找两个）

这时就需要借助阶梯形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将此矩阵还原为方程组，得：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 0 \end{cases}$$

好，现在我们就通过此方程组来观察 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 这五个未知数中到底哪两个未知数可以自由取值。

可以是 x_4、x_5 吗？当然不可以，因为 $x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 0$。当 x_4、x_5 这两个未知数中的其中一个定了，另一个肯定也定了。比如当 x_4 取 100 时，x_5 肯定是 300。也就是说，x_4、x_5 这两个未知数中只有一个可以自由取值，这两个未知数不能同时自由取值，所以自由取值的两个未知数不能是 x_4、x_5。

那么可以是 x_3、x_5 吗？我们来验证一下。怎么个验证法？很简单，就是假设 x_3、x_5 已知，看看能不能解出 x_1、x_2、x_4。我们现在开始验证。因为 x_5 已知，根据 $x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 0$，就可以把 x_4 解出来。好，现在 x_3、x_4、x_5 都是已知了，根据 $x_2 - x_3 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0$，就可以解出 x_2。现在 x_2、x_3、x_4、x_5 都是已知了。根据 $x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0$，就可以解出 x_1。也就是说：已知 x_3 和 x_5，可以把 x_1、x_2、x_4 都解出来，所以自由取值的两个未知数可以是 x_3、x_5。

那么可以是 x_3、x_4 吗？我们来验证一下。因为 x_4 已知，根据 $x_4 - \frac{1}{3}x_5 = 0$，也就可以把 x_5 解出来。好，现在 x_3、x_4、x_5 都是已知了，根据 $x_2 - x_3 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 = 0$，就可以解出 x_2。现在 x_2、x_3、x_4、x_5 都是已知了。根据 $x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0$，就可以解出 x_1。也就是说：已知 x_3 和 x_4，可以把 x_1、x_2、x_5 都解出来，所以自由取值的两个未知数可以是 x_3、x_4。

同理，可以自由取值的两个未知数也可以是 x_2 和 x_4（因为根据 x_4 可以解出 x_5，根据 x_2、

x_4、x_5 可以解出 x_3 和 x_1）、x_2 和 x_5（因为根据 x_5 可以解出 x_4，根据 x_2、x_4、x_5 可以解出 x_3 和 x_1）。

综上，我们知道了可以自由取值的两个未知数可以是 x_3、x_5 或 x_3、x_4 或 x_2、x_4 或 x_2、x_5。那么，我们到底取这四组中的哪组呢？随便，取哪组都行。此题我就取 x_3、x_5 了。

好，现在请大家翻回到本节开始那一页。看步骤（3）先让计算 n-r 对吧（我们刚才已经计算过了），n-r=A，计算这个“A”的目的有两个：一是说明 n 个未知数中有 A 个可以自由取值（这个环节我们刚刚完成），二是说明需要取 A 组（这个环节我们还未完成）。

那么此题，A=n-r=2，说明需要取两组 x_3、x_5。那么可以如下这样取吗？

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -200 \\ -2000 \end{pmatrix}$

不可以，因为我在讲解本节知识点中的步骤（3）时提到过，取的这 A 组向量必须是线性无关的。而以上的这种取法，第二组是第一组的-2 倍，所以不能这么取（包含零向量的向量组，包含相等的向量的向量组，包含成比例的向量的向量组都是线性相关的）。以下两种取法也是错误的。

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

因为包含了零向量，所以不能这么取。

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

因为包含了相等的向量，所以不能这么取。

我举以上几个错误的取法的例子，是为了提醒大家：虽然可以自由取值，但是取的 A 组向量必须是线性无关的。

好了，反着说了半天，也该正着说了，那就取呗，取两组。

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

同学们，你们不要问我为什么取 1、0 和 0、3，怎么不取 1、2 和 3、4 呢？真的，不要这样问。因为这样的问题你们让我怎么回答啊？这本来就是随便取的，一万个人说不定就有一万种取法。你想取 1、2 和 3、4 当然也行，因为是自由取值嘛（但是别忘了啊，取的这 A 组向量必须是线性无关的）。

好，现在我们针对第一组 x_3、x_5 计算 x_1、x_2、x_4。此时需要借助之前的方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 - \dfrac{1}{2}x_5 = 0 \\ x_4 - \dfrac{1}{3}x_5 = 0 \end{cases}$$

由于 x_3、x_5 分别为 1、0，解得 $x_1 = -1$、$x_2 = 1$、$x_4 = 0$。所以：

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

再来针对第二组 x_3、x_5 计算 x_1、x_2、x_4。第二组 x_3、x_5 分别为 0、3，解得 $x_1 = \dfrac{7}{2}$，$x_2 = \dfrac{5}{2}$，$x_4 = 1$。所以 $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$。

所以原方程组的基础解系为：$\vec{a}_1, \vec{a}_2$。

所以原方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2$，其中 c_1、c_2 为任意常数。

至此，这道题已经做完了。我相信同学们虽然知道齐次线性方程组怎么求解了，但对于这道题可能仍然存在疑惑。那么现在，我就来解答一下同学们的疑惑。

疑惑 1：既然有的人取 x_3、x_5，有的人取 x_3、x_4，并且就算两个人取的都是 x_3、x_5，取的数字也有可能不一样啊，这么说来，答案难道是多种多样的吗？

答：答案是唯一的，但是答案的形式的确是多种多样的，一亿个人可能有一亿种不同的答案形式。所以以后做这种题千万别对答案，只要按我讲的方法做，答案就一定是正确的。老师批改这种题是最费时间的，原因就是答案形式是多种多样的。但是你骗不了老师，如果你错了，老师一定会判断出来。

疑惑 2：在步骤（1）求秩时，除了用行变换外，可以用列变换吗？

答：不可以。我早在讲矩阵的秩时就讲过，求矩阵的秩只能用行变换。（注意：你们此时是在准备研究生入学考试，不是搞研究，如果你们是搞研究，那么我就会告诉你们步骤（1）求秩时其实是可以使用列变换的，但是这将导致步骤（3）变得非常麻烦，很容易错。因此，凡是求矩阵的秩时，你们就：只用行变换，别用列变换。）

疑惑 3：最后的答案中含有可以任意取值的常数 c_1、c_2。这样说来，该方程组岂不是有无穷多组解了吗？

答：不错，你说得非常正确，此题所给的这个方程组就是有无穷多组解。但是你问这样的问题，我还要批评你，请你仔细看看步骤（2），我在步骤（2）中已经明明白白地写了，当 r<n 时，方程组有无穷多组解。

此时，估计有同学认为我对于疑惑 1 的解释和对于疑惑 3 的解释是矛盾的。那好，我就再解释一下。我在回答疑惑 1 时所说的“答案是唯一的”与我刚刚说的“有无穷多组解”并不矛盾，我举个例子大家就明白了。

比如“偶数”，我既可以表示为“$\{x \mid x=2n，n\text{为任意整数}\}$”，也可以表示为“除了奇数以外的整数”，还可以表示为“能被 2 整除的整数”。但是无论采用哪种表示方式，答案都是——“偶数”。这就是我所谓的“答案是唯一的”。

而“偶数”包含了无穷多的数，比如−2、0、2、4 等等，这就是我所谓的“有无穷多组解”。

现在大家明白了吧。这道题也是一样，满足此方程组的 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5 有无数组，不同的人表达这无数组的形式也是不同的，可能有人是：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ i \\ j \end{pmatrix}$$

可能有人是：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \\ n \\ o \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

但他们表示的无数组解是相同的。也就是说，在第一个人表示的无数组解中任意选一组解，那么这组解一定也在第二个人表示的无数组解中，反之亦然。

疑惑 4：基础解系是什么意思？

答：能提出这样的问题的同学值得表扬，说明他一定是认真思考了，现在我来回答一下这个问题。现在请大家把书往前翻，翻到此题的最开始处，然后再把此题读一遍。

大家看到了吧？这道题一共有两问。第一问问的是基础解系，第二问问的是通解。那么到底什么是基础解系呢？

首先，我要告诉大家的是，基础解系是针对齐次方程组来说的概念，在非齐次方程组中根本不存在基础解系的概念。现在可能同学们有些迫不及待地想知道基础解系到底是什么意思。呵呵，别急，我马上就要说了。

基础解系指的是：齐次方程组的解向量组中的一个最大无关组。我已经解释完了，但据我估计，可能仍然有一部分同学没弄明白什么叫基础解系，而基础解系这个概念又非常的重要。因此，我就再把基础解系详细解释一下。

大家还记得什么叫一个向量组的最大无关组吧？如果忘记了的话，我来帮大家复习一下。有一个向量组 A，向量组 A 中包含了 n 个向量，现在从这 n 个向量中取出 r 个向量（$r \leq n$）组成向量组 B，如果这 r 个向量线性无关，并且从剩下的 n-r 个向量中任意拿出一个向量，加入到这 r 个向量中，所得到的 r+1 个向量是线性相关的，则称这 r 个向量所组成的向量组 B 是向量组 A 的一个最大无关组。这在之前都讲过，我只是怕你们忘记了，因此复习一下而已。

现在，基础解系就相当于向量组 B，齐次方程组的解向量组（齐次方程组的解向量组包含无数个向量，这无数个向量中的每一个向量都是齐次方程组的解）相当于向量组 A，刚才我已经说了，向量组 B 是向量组 A 的一个最大无关组，所以基础解系是齐次方程组的

解向量组的一个最大无关组。而我们知道，一个向量组的最大无关组很可能不是唯一的，所以一个齐次方程组的基础解系当然不是唯一的，明白了吧！但是无论是哪一个基础解系，基础解系中含有的向量个数都是 n-r 个，所以我们在步骤（3）中取了 n-r 组。

大家现在应该都明白基础解系的意思了吧。我用最简单的话再说一遍：基础解系是一个向量组，其中包含了 n-r 个向量，它是“齐次方程组的所有解向量”所组成的向量组的最大无关组。

最后，要告诉大家的是：在齐次方程组的基础解系中的每一个向量前面乘以任意常数后相加，就是齐次方程组的通解。

相信通过上一道题，大家已经会用本节的方法来求解齐次线性方程组了。为了帮助大家巩固所学知识，我下面又出了一道解齐次线性方程组的题，解题方法与上一道题完全一样，没有任何新的知识点，只是为了帮助大家巩固一下所学知识而已。因此，下面这道题的过程将不再像上道题一样详细。

考研题 3.2 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3-2x_4=0 \\ x_1-x_2-4x_3-3x_4=0 \end{cases}$$ 的基础解系和通解。

解：与上道题一样，咱们先别一上来就套用刚刚讲的三个步骤，得先看看这个方程组到底能不能用本节的方法去求解。

此方程组中的每一个方程的形式都是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，由此我们立刻可以断定此方程组能用本节的方法求解（顺便说一句，此方程组不能用克拉默法则求解，因为方程个数不等于未知数的个数）。

好，确定了此方程组能用本节的方法求解后，我们再继续看。此题的已知条件中明确的写了“齐次”两个字，其实就算不明确的写“齐次”两个字，我们也可以知道此方程组是一个齐次方程组，因为每个方程的等号右侧的数全是 0。

好，既然此方程组能用本节的方法求解，并且我们已经确定了此方程组是齐次方程组，那么我们现在就严格按照三个步骤来求解此方程组。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并且求出矩阵的秩。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以秩为 2，即 r=2。

（2）判断解的类型。

未知数个数 n=4，秩 r=2。由于 r<n，所以此方程组有无穷多解，并且进行第三步。

（3）求解。

n-r=4-2=2，说明四个未知数中有两个未知数可以自由取值并且取两组。

根据：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases}$$

选取自由取值的未知数为 x_2、x_3。

第一组：$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

根据第一组，解得 $x_1 = -\frac{5}{4}$、$x_4 = -\frac{3}{4}$，所以 $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$。

根据第二组，解得 $x_1 = -\frac{1}{2}$、$x_4 = -\frac{3}{2}$，所以 $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$。

所以原方程组的基础解系为：

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\1\\0\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}。$$

所以原方程组的通解为：

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2$$，其中 c_1、c_2 为任意常数。

3.10.2 求非齐次方程组的通解

现在要给大家介绍的是“求非齐次方程组的通解”的步骤。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 r_1、r_2。

（2）判断解的类型。具体的判断方法如下：

① 若 $r_1 \neq r_2$，则该非齐次方程组无解，不用再做了。

② 若 $r_1 = r_2$ 且 $r_1 = r_2 = n$（未知数个数），则该非齐次方程组有唯一的解，不用再进行步骤（**3**）了。

③ 若 $r_1 = r_2$ 且 $r_1 = r_2 < n$（未知数个数），则该非齐次方程组有无穷多解，并且需要进行步骤（**3**）。

（3）先当成对应的齐次方程组，按齐次方程组的步骤（**3**）求出齐次方程组的通解。然后再还原成非齐次方程组，令自由未知数取全零，求出非齐次方程组的一个特解。最后，用齐次方程组的通解加上非齐次方程组的特解，得到的就是非齐次方程组的通解。

看完这三个步骤后，大家是否依然感到困惑？没关系，在下面的题中我会具体的说。

考研题 3.3 求线性方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$ 的通解。

解：先看看这个方程组到底能不能用本节的方法去求解。

此方程组中的每一个方程的形式都是 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$，由此我们立刻可以断定此方程组能用本节的方法求解（顺便说一句，此方程组不能用克拉默法则求解，因为方程个数不等于未知数的个数）。

好，确定了此方程组能用本节的方法求解后，我们再继续看。虽然此题的已知条件中并没有明确写“非齐次”三个字，但是我们也可以知道此方程组是一个非齐次方程组，因为每个方程的等号右侧的数并非全是 0。

好，既然此方程组能用本节的方法求解，并且我们已经确定了此方程组是非齐次方程组，那么我们现在就严格按照刚刚讲的求解非齐次方程组的三个步骤来求解。

（1）写出所给方程组对应的矩阵并求两个秩 r_1、r_2。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

大家看到了吧，之前我给大家讲的齐次方程组的求解步骤中的第一步也是将所给齐次方程组化为矩阵的形式，但是齐次方程组中每个方程右侧的 0 是不写在矩阵中的。非齐次方程组则不然，非齐次方程组中每个方程右侧的数也要写在矩阵中。上述矩阵的最后一列“1，0，3，2”就是这么来的。

好，那么什么叫“求两个秩”呢？你们很快就会明白，现在先不管这个，咱们就按照求矩阵的秩的方法求一下矩阵 A 的秩。

矩阵 A 有四行六列，2(4−1)=6，说明求秩化阶梯形一共需要六步。

化阶梯形的步骤①：将 a_{11} 化为 1，矩阵 A 的 a_{11} 处本来就是 1，所以步骤①就不用做了。

化阶梯形的步骤②：将 a_{11} 正下方的 3，0，5 化为 0，0，0。方法是第一行乘以−3 加到

第二行；第一行乘以-5 加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&-3\end{pmatrix}$$

化阶梯形的步骤③：将 a_{22} 化为 1，方法是第二行乘以-1。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&-3\end{pmatrix}$$

化阶梯形的步骤④，将 a_{22} 正下方的 1，-1 化为 0，0。方法是第二行乘以-1 加到第三行；第二行乘以 1 加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

好，现在我们来看化阶梯形的步骤（5）。同学们，你们是否感到奇怪？矩阵的秩的求法我很早以前就讲过了，而且在考研题 3.1与考研题 3.2中，我根本没有如此详细地写出化阶梯形的步骤，那为什么这道题我要如此详细地写出化阶梯形的步骤呢？现在我来告诉大家原因。原因是：这道题理论上来说化阶梯形需要六个步骤，但实际上只用四个步骤就行了。简言之，此题比较特殊，因此我才这么详细地说。

好，这时可能有的同学会问，为什么步骤⑤和步骤⑥不用了？现在我就来解释。按说此矩阵化阶梯形的步骤⑤应该是把 a_{33} 化为 1，可现在 a_{33} 是 0，我在第 2 章讲矩阵的秩的求法的时候就告诉过大家这种特殊情况的处理办法，即：**看 a_{ii} 的正下方的数，记住是正下方，看看其正下方的数中有没有非 0 的数。如果有，那么此时立刻将该数所在行与第 i 行互换，这样一来，a_{ii} 就不是 0 了而是一个非 0 的数，然后我们就可以正常做了（即利用初等行变换中的“以 $k(k\neq0)$ 乘某行”将 a_{ii} 化为 1）；如果没有，则此时我们根本不用去管 a_{ii} 了，而是把 $a_{i(i+1)}$ 当成 a_{ii} 即可（也就是说，本来我们要做的是将 a_{ii} 化为 1，现在变为了将 a_{ii} 右侧的那个数 $a_{i(i+1)}$ 化为 1）。**

我们回到此题上来。我们现在看 a_{33} 正下方的数，a_{33} 正下方的数只有一个，就是 a_{43}，

而 a_{43} 也为 0。换言之，a_{33} 正下方的数中没有非 0 的数。好，那我们就改变目标，我们的新目标是把 a_{33} 右侧的 a_{34} 化为 1。a_{34} 为 0，且 a_{34} 正下方的数 a_{44} 也为 0。那我们就第二次改变目标，我们的新目标是把 a_{34} 右侧的 a_{35} 化为 1。a_{35} 为 0，且 a_{35} 正下方的数 a_{45} 也为 0。

于是我们只好第三次改变目标。我们的新目标是将 a_{35} 右侧的数 a_{36} 化为 1。而 a_{36} 为 0，其正下方的数 a_{46} 也为 0，而 a_{36} 的右侧已经没有数了。这说明：我们虽然竭尽全力地去尝试，但仍然失败了。也就是说，此矩阵化阶梯形的步骤⑤根本没法进行。连步骤⑤都不能进行了，步骤⑥当然更不用管了。

因此，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不用再继续化了，它已经是阶梯形矩阵了。

好，那么求两个秩是什么意思呢？刚才我让大家不用管，现在该管了，我们在以上矩阵的最后一列之前画一条竖线，即：

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

然后我们把竖线左侧的矩阵记为矩阵 B，不以竖线划分的矩阵记为矩阵 C，即：

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

r_1 指的就是矩阵 B 的秩、r_2 指的就是矩阵 C 的秩，这就是所谓的“求两个秩”。此题 $r_1 = 2$、$r_2 = 2$。

（2）判断解的类型。

由于 $r_1 = r_2$ 且 $r_1 = r_2$<n（2<5），所以该非齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

先当成对应的齐次方程组，即将矩阵 C 的最后一列变为全零，即：

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$（注意：最后一列变为全零）

转化为方程组得：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

由于 n-r=5-2=3，说明五个未知数中有三个未知数可以自由取值且取三组。选可自由取值的未知数为 x_3、x_4、x_5。

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，第三组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

求得对应齐次方程组的基础解系为：

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}。$$

好，所以该非齐次方程组对应的齐次方程组的通解为：

$c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + c_3 \vec{a}_3$，其中 c_1、c_2、c_3 为任意常数。

但是这并不是此题的答案，此题让我们求的是**非齐次方程组的通解**。刚刚求的是**该非齐次方程组所对应的齐次方程组的通解**，还需要加上一个非齐次方程组的特解。

下面我们开始求非齐次方程组的特解：

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$注意：最后一列恢复了，不是全零了。

转化为方程组得：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \end{cases}$$

取$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。注意，以后求非齐次方程组特解的时候，大家就死死记住：令自由取值的未知数取**全零**。

根据方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 3 \end{cases}$

解得：$x_1 = -2$，$x_2 = 3$。

所以$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$为非齐次方程组的一个特解。

好，万事俱备了，可以得出答案了。

“非齐次方程组的通解=对应齐次方程组的通解+非齐次方程组的特解”。此题中，对应齐次方程组的通解为：$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3$，非齐次方程组的特解为$\vec{b}$，所以，此题的答案为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + \vec{b}$$，其中c_1、c_2、c_3为任意常数。

此题已经讲完了，建议大家看完这题的解答过程以后，再翻回到前面看看本节的知识点（求解非齐次方程组的三个步骤）。这样，你们会印象更深刻。

3.11　房间 303——五个重要的定理

刚刚讲完的房间 302 中没有涉及到线性无关、线性相关、线性表出的知识，大家是不是已经把线性相关、线性无关、线性表出这些重要的基本概念忘了？呵呵，要是忘了的话赶紧翻回到前面复习一下吧，因为现在要讲的房间 303 又要涉及到线性相关、线性无关和线性表出。

好，现在我们开始讲房间 303，从标题就可以很明显地看出，这一节要讲的是五个重要的定理。

3.11.1　定理 1

① **向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$（n≥2）线性相关的充分必要条件是：其中至少有一个向量可以由其余 n-1 个向量线性表出。**

② **向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$（n≥2）线性无关的充分必要条件是：其中任意一个向量都不能由其余 n-1 个向量线性表出。**

此定理揭示了线性相/无关与线性表出的关系。

我们来看一道例题。

例. 向量 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，问这四个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{a}_2+2\vec{a}_3+3\vec{a}_4$

即 $\vec{a}_1$ 可以由 $\vec{a}_2$，$\vec{a}_3$，$\vec{a}_4$ 线性表出。也就是说，这四个向量中至少有一个向量可以由其余三个向量线性表出。根据定理 1，这四个向量是线性相关的。

3.11.2　定理 2

m 个 n 维向量，若 m>n，则这 m 个向量线性相关。

例. 有四个向量 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}9\\7\\2\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$，问这四个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：四个三维向量。4>3，根据定理 2 可知这四个向量是线性相关的。

3.11.3　定理 3

① **n** 个同维的向量，组成一个向量组。“该向量组的秩（我在本章第六车砖中说了，向量组的秩转化为矩阵的秩来求）为 **r**”的充分必要条件是 “从这 **n** 个向量中拿出 **r** 个向量，可能有很多种拿法，在这很多种拿法中至少存在一种拿法，按该拿法拿出的 **r** 个向量是线性无关的，并且从这 **n** 个向量中任意拿出 **p**（**p>r**）个向量时，这 **p** 个向量一定是线性相关的。”

例：$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}j\\k\\o\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$，若矩阵$\begin{pmatrix}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\end{pmatrix}$的秩为 3，可以得出什么结论？

解：根据本章第六车砖（向量组的秩等于矩阵的秩），可得向量组：$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$ 的秩为 3。根据刚刚讲完的定理 3 的①可得：

$$\left.\begin{array}{l}\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\\\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_5\\\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\\text{向量组}\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\end{array}\right\}\text{这六个向量组中的每个向量组都是线性相关的。}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\\ \text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4\\ \text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_5\\ \text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_4\\ \text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_3,\vec{a}_5\\ \text{向量组}\vec{a}_1,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\ \text{向量组}\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\\ \text{向量组}\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_5\\ \text{向量组}\vec{a}_2,\vec{a}_4,\vec{a}_5\\ \text{向量组}\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\end{array}\right\}\text{在这十个向量组中至少存在一个向量组是线性无关的。}$$

刚才我们是将矩阵$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)$看成是列向量写在一起，其实我们完全可以换个角度看待此矩阵，我们也可以将矩阵$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)$看成是行向量写在一起。再说得详细一些，我们现在把$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)$展开来写，即：

$$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5\right)=\begin{pmatrix}a & d & g & j & p\\ b & e & h & k & q\\ c & f & i & o & r\end{pmatrix}$$

此矩阵如果以列来看，是五个列向量写在一起，此题的已知条件中已经说了，矩阵$\begin{pmatrix}a & d & g & j & p\\ b & e & h & k & q\\ c & f & i & o & r\end{pmatrix}$的秩为 3。那么根据刚刚讲完的定理 3 的①可以知道，从五个列向量中任意拿出三个，共有十种拿法。在这十种拿法中至少有一种拿法，按该拿法拿出的三个列向量是线性无关的。而从这五个列向量中任意拿出四个向量（共有五种拿法），任意拿出五个向量（只有一种拿法）肯定都是线性相关的。以上画横线的话我在之前刚讲完。现在我想说的是，矩阵“$\begin{pmatrix}a & d & g & j & p\\ b & e & h & k & q\\ c & f & i & o & r\end{pmatrix}$的秩为 3”这件事是肯定的，定理 3 的①也是确定的，可是没谁说过必须把此矩阵以列划分啊！也就是说，我们还可以把此矩阵以行划分。此矩阵如果以行划分的话，可以被划分为三个行向量$\vec{\beta}_1=(a,d,g,j,p)$，$\vec{\beta}_2=(b,e,h,k,q)$，

$\vec{\beta}_3=(c,f,i,o,r)$。然后，同样是因为该矩阵的秩为 3，根据本章第六车砖（矩阵的秩等于向量组的秩），可以得到这三个行向量组成的向量组的秩为 3（之前得到的是五个列向量组成的向量组的秩为 3）。根据定理 3 的①，向量组 $\vec{\beta}_1$，$\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_3$ 是线性无关的（因为从三个行向量中拿三个行向量只有一种拿法，所以对于只有一种拿法来说，定理 3 的①中的“至少存在一种拿法，按该拿法拿出的 r 个向量是线性无关的”不就是特指这一种拿法了嘛）。

我之所以讲这道例题，就是为了让大家能够明白这样一件事：**矩阵既可以看成是列向量写在一起也可以看成是行向量写在一起，而矩阵的秩是确定的。那么，根据矩阵的秩等于向量组的秩，可以知道矩阵的秩等于行向量组的秩，等于列向量组的秩。**

比如一个四行五列的矩阵（此矩阵既可以看成是由五个列向量组成的，也可以看成是由四个行向量组成的）的秩为 4，则可以说明：由四个行向量所组成的向量组的秩为 4，由五个列向量所组成的向量组的秩为 4。然后，根据定理 3 的①，可以得到：这四个行向量是线性无关的；这五个列向量是线性相关的；从五个列向量中取四个列向量，至少存在一种取法，按此取法取出的四个列向量是线性无关的。

另外，别忘了定理 3 的①是充分必要条件。比如现在有八个向量，若已知从这八个向量中任意抽出 $A(A\geq5)$ 个向量都是线性相关的，则可以知道这八个向量所组成的向量组的秩小于 5。

考研题 3.4　设向量组 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\5\\8\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\6\end{pmatrix}$，$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\x\\2\end{pmatrix}$ 线性相关，则参数 x=________。

解：此题给出了四个列向量，且它们线性相关。根据定理 3 的①，这四个列向量所组成的向量组的秩小于 4，而向量组的秩等于矩阵的秩，所以令矩阵 $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4)$，则矩阵 A 的秩小于 4。

下面把矩阵 A 化为阶梯形矩阵。

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&0&-1&3\\-3&5&3&x\\4&8&6&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&1&1\\0&8&0&x+3\\0&4&10&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&8&0&x+3\\0&4&10&-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&4&x+7\\0&0&12&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{x+7}{4}\\0&0&12&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{x+7}{4}\\0&0&0&3(x+7)\end{pmatrix}$$

由于矩阵 A 的秩小于 4。而只有当 $x=-7$ 时，A 的秩才小于 4，所以 $x=-7$ 。

接下来我们讲定理 3 的②。

② 现在有 m 个方程 n 个未知数组成了一个齐次方程组，如下：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

然后设向量组 A 中包含 n 个向量：

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ \vec{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

则有如下结论成立：

向量组 A 的秩等于 n $\Leftrightarrow$ 齐次方程组有唯一零解。

向量组 A 的秩小于 n $\Leftrightarrow$ 齐次方程组有非唯一解（非零解）（无穷多解）。

定理 3 的②讲完了。大家好好看看，这其实就是房间 302 中所讲解的解齐次方程组三个步骤中的第二步（判断解的类型），现在只不过是以定理的形式给出来了而已。因此，这属于重复讲解。

好，到目前为止，定理 3 的①与②都给大家讲完了。**它们的共同点在于都与向量组的秩有关，区别在于定理 3 的①说的是向量组的秩与线性相/无关之间的关系，而定理 3 的②说的是向量组的秩与齐次方程组解的类型之间的关系。**

例．已知齐次方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_4 + a_4x_5 = 0 \\ a_5x_1 + a_6x_2 + a_7x_3 + a_8x_4 = 0 \\ a_9x_1 + a_{10}x_2 + a_{11}x_3 + a_{12}x_4 + a_{13}x_5 = 0 \\ a_{14}x_1 + a_{15}x_2 + a_{16}x_3 + a_{17}x_4 + a_{18}x_5 = 0 \end{cases}$$ ［其中 $a_i(1 \le i \le 18)$ 为特定的常数］

有无穷多组解，问：$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_5 \\ a_9 \\ a_{14} \end{pmatrix}$，$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_{10} \\ a_{15} \end{pmatrix}$，$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_7 \\ a_{11} \\ a_{16} \end{pmatrix}$，$\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_8 \\ a_{12} \\ a_{17} \end{pmatrix}$，$\vec{b}_5 = \begin{pmatrix} a_4 \\ 0 \\ a_{13} \\ a_{18} \end{pmatrix}$这五个向量所组成的向量组的秩是多少？这五个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：根据刚刚讲完的定理 3 的②，立刻可以得出这样一个结论：这五个向量所组成的向量组的秩是小于未知数的个数的，而此题未知数的个数为 5，所以这五个向量所组成的向量组的秩是小于 5 的（具体是多少并不知道）。

然后，再根据定理 3 的①，立刻可以知道这五个向量是线性相关的。

定理 3 还有两个推论，虽是推论，却非常重要，下面介绍这两个推论。

定理 3 的第一个推论：有 n 个向量，它们是线性相关的。则：在这 n 个向量的基础上，再增加任意 m 个向量，则这 n+m 个向量依然是线性相关的（口诀：少相则多相）；有 n 个向量，它们是线性无关的。则：从这 n 个向量中任意去掉 m 个向量，则剩下的 n-m 个向量依然是线性无关的（口诀：多无则少无）。

例．$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ \mathrm{b} \\ c \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} d \\ \mathrm{e} \\ f \end{pmatrix}$，$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} g \\ \mathrm{h} \\ i \end{pmatrix}$，这三个向量是线性相关的。$\vec{a}_4 = \begin{pmatrix} j \\ \mathrm{k} \\ l \end{pmatrix}$，$\vec{a}_5 = \begin{pmatrix} m \\ \mathrm{n} \\ o \end{pmatrix}$，问：$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$这五个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：因为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性相关，根据“少相则多相”，可知$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$是线性相关的。

例．$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ \mathrm{b} \\ c \end{pmatrix}$，$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} d \\ \mathrm{e} \\ f \end{pmatrix}$，$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} g \\ \mathrm{h} \\ i \end{pmatrix}$，这三个向量是线性无关的。问：$\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$这两个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：因为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性无关，根据“多无则少无”，可知$\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$这两个向量是线性无关的。

刚刚我给大家介绍了定理 3 的第一个推论，可以将其简记为口诀“少相则多相，多无则少无”。而接下来要介绍的定理 3 的第二个推论，也是有口诀的。口诀是“少无则多无，多相则少相”。同学们，看到这里，你们是不是感觉很奇怪，刚才第一个推论的口诀是“少相则多相，多无则少无”，而现在第二个推论的口诀竟然是“少无则多无，多相则少相”。这不是矛盾了嘛！这是怎么回事呢？请继续往下看。

定理 3 的第二个推论：有 n 个 p 维向量，它们是线性无关的。则：把每个向量都增加 q 维（必须是在相同的位置增加）后，所得到的 n 个(p+q)维向量仍然是线性无关的（口诀：少无则多无）；有 n 个 p 维向量，它们是线性相关的。则：把每个向量都减少 q 维（必须是在相同的位置减少）后，所得到的 n 个(p-q)维向量仍然是线性相关的（口诀：多相则少相）。

现在大家明白了吧。定理 3 的第二个推论的口诀中的“多”和“少”与第一个推论的口诀中的“多”和“少”不是一个意思。**第一个推论的口诀中的“多”和“少”指的是向量个数的增减，而第二个推论的口诀中的“多”和“少”指的是向量个数不变，向量维数的增减。**

例.已知$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\ \mathrm{b}\\ c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\ \mathrm{e}\\ f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\ \mathrm{h}\\ i\end{pmatrix}$这三个向量是线性无关的。$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}a\\ \mathrm{b}\\ c\\ r\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}d\\ \mathrm{e}\\ f\\ s\end{pmatrix}$，$\vec{a}_6=\begin{pmatrix}g\\ \mathrm{h}\\ i\\ t\end{pmatrix}$，问$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$这三个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：因为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$这三个向量是线性无关的，而$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$增维（在相同的位置增的，都是在末尾，并且增的是一维）后所得到的向量组。根据定理 3 的第二个推论（少无则多无），不管 r、s、t 这三个数是什么，$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$都是线性无关的。

例.已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\ \mathrm{b}\\ c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\ \mathrm{e}\\ f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\ \mathrm{h}\\ i\end{pmatrix}$这三个向量是线性无关的。$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}a\\ \mathrm{b}\\ c\\ \mathrm{h}\\ \mathrm{x}\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}d\\ \mathrm{e}\\ f\\ s\\ y\end{pmatrix}$，

$\vec{a}_6=\begin{pmatrix}g\\ \mathrm{h}\\ i\\ t\\ z\end{pmatrix}$，问 $\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$这三个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是线性无关的，利用的还是定理 3 的第二个推论。通过这道题，我想告诉大家的是：并不是只有增减一维才能用定理 3 的第二个推论。比如这道题，增加了两维，照样能用定理 3 的第二个推论（但必须是在每个向量的相同位置增减）。

例.已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\ \mathrm{b}\\ c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\ \mathrm{e}\\ f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\ \mathrm{h}\\ i\end{pmatrix}$这三个向量是线性无关的。$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}a\\ \mathrm{x}\\ b\\ \mathrm{c}\\ \mathrm{r}\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}d\\ \mathrm{y}\\ e\\ f\\ s\end{pmatrix}$，

$\vec{a}_6=\begin{pmatrix}g\\ \mathrm{z}\\ h\\ i\\ t\end{pmatrix}$，问 $\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$这三个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是线性无关的，利用的还是定理 3 的第二个推论。通过这道题，我想告诉大家的是：并不是只有在向量的末尾进行增减才能用定理 3 的第二个推论。比如这道题，增加了两维，其中的一维根本没有增加在向量的末尾，照样能用定理 3 的第二个推论（只要在每个向量的相同位置增减即可）。

例.已知 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}a\\ \mathrm{b}\\ c\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}d\\ \mathrm{e}\\ f\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}g\\ \mathrm{h}\\ i\end{pmatrix}$这三个向量是线性相关的。$\vec{a}_4=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$，$\vec{a}_5=\begin{pmatrix}d\\ e\end{pmatrix}$，$\vec{a}_6=\begin{pmatrix}g\\ h\end{pmatrix}$，问 $\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$这三个向量是线性相关的还是线性无关的？

解：因为 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$是线性相关的（题目的已知条件），而 $\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$减维后（维数由 3 变为 2）所得到的向量组。根据定理 3 的第二个推论（多相则少相），$\vec{a}_4$、$\vec{a}_5$、$\vec{a}_6$是线性相关的。

3.11.4　定理 4

有 **n** 个线性无关的向量，现在在这 **n** 个向量基础上，增加一个向量。如果增加之后形成的 **n+1** 个向量是线性相关的，则有这样一个结论：增加的那个向量一定可以由原来的 **n** 个向量线性表出，且表出法唯一。

例. $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性无关，$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$线性相关，则 $\vec{a}_4$一定可以由 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$线性表出，即有：$\vec{a}_4=c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3$，其中 c_1、c_2、c_3的取值是唯一的。

3.11.5　定理 5

有两个向量组，向量组 **A** 和向量组 **B**，向量组 **A** 中包含了 **s** 个向量，向量组 **B** 中包含了 **t** 个向量。

① 若向量组 **B** 可以由向量组 **A** 线性表出，且 **t>s**，则：向量组 **B** 中包含的 **t** 个向量线性相关。

② 若向量组 **B** 可以由向量组 **A** 线性表出，且向量组 **B** 中包含的 **t** 个向量线性无关，则：$t \le s$。

3.11.6　真题分析

房间 303 讲完了，我们来看一下房间 303 所对应的几道考研题。

考研题 3.5　下列向量组中 a、b、c、d、e、f 均是常数，则线性无关的向量组是：

（A）$\vec{a}_1=(1,-1,0,2)^T$，$\vec{a}_2=(0,1,-1,1)^T$，$\vec{a}_3=(0,0,0,0)^T$

（B）$\vec{a}_1=(a,b,c)^T$，$\vec{a}_2=(b,c,d)^T$，$\vec{a}_3=(c,d,a)^T$，$\vec{a}_4=(d,a,b)^T$

（C）$\vec{a}_1=(a,1,b,0,0)^T$，$\vec{a}_2=(c,0,d,1,0)^T$，$\vec{a}_3=(e,0,f,0,1)^T$

（D）$\vec{a}_1=(1,2,1,5)^T$，$\vec{a}_2=(1,2,3,6)^T$，$\vec{a}_3=(1,2,5,7)^T$，$\vec{a}_4=(0,0,0,1)^T$

解：

（A）选项：我在房间 301 中告诉过大家，包含零向量的向量组是线性相关的。（A）选项中的向量组包含零向量，所以（A）选项中的向量组是线性相关的，而此题让选的是线性无关的向量组，所以（A）选项不能选。

（B）选项：此向量组中包含了四个三维向量。根据房间 303 的定理 2，直接可以判断出（B）选项中的向量组是线性相关的。所以（B）选项不能选。

（C）选项：首先根据房间 301 可知，单位向量组：$(1,0,0)^T$，$(0,1,0)^T$，$(0,0,1)^T$ 是线性无关的，然后再根据房间 303 的定理 3 的第二个推论（少无则多无）可知，$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 是线性无关的。所以（C）选项为本题的正确选项。

（D）选项：将 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$ 四个向量组成矩阵 A，即：

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&2&2&0\\1&3&5&0\\5&6&7&1\end{pmatrix}$$，计算一下 A 的行列式 $|A|$。

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$（计算过程省略）

根据第 2 章的房间 201 中的大总结，行列式为零可以推出矩阵 A 不满秩。由于 A 是四行四列的矩阵，所以满秩指的是该矩阵的秩等于 4，那么不满秩指的就是矩阵 A 的秩小于 4。

根据本章的第六车砖（矩阵的秩等于向量组的秩），可以知道向量组$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$的秩小于 4（当然，如果以行向量来看，向量组$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 0 \end{pmatrix}$的秩也小于 4，但是我们用不到），然后，根据房间 303 的定理 3 的①，立刻可以知道向量组$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$是线性相关的。所以（D）选项不能选。

注意，这道题之所以能用行列式来做，是因为这是四个四维向量，向量个数等于向量维数，组成的矩阵正好是方阵，即行数等于列数，方阵是有对应的行列式的，一旦此题改为三个四维列向量，问线性相关性，那就不能用行列式了。

本题答案：（C）

考研题 3.6

已知四维列向量$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$线性无关，则下列向量组中线性无关的是：

（A）$\vec{a}_1-\vec{a}_2$，$\vec{a}_2-\vec{a}_3$，$\vec{a}_3-\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$

（B）$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4+\vec{a}_1$

（C）$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3-\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$

（D）$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$

解：我们用本章的第三车砖，也就是线性相/无的最基本的定义来做这道题。

（A）选项：$c_1\left(\vec{a}_1-\vec{a}_2\right)+c_2\left(\vec{a}_2-\vec{a}_3\right)+c_3\left(\vec{a}_3-\vec{a}_4\right)+c_4\left(\vec{a}_4-\vec{a}_1\right)=\vec{0}$。当 $c_1=1$、$c_2=1$、$c_3=1$、$c_4=1$ 时，上式成立。也就是说，c_1、c_2、c_3、c_4 **不全为 0** 时，上式能成立。根据本章的第三车砖可知，（A）选项中的四个向量是线性相关的。

（B）选项：$c_1\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)+c_2\left(\vec{a}_2+\vec{a}_3\right)+c_3\left(\vec{a}_3+\vec{a}_4\right)+c_4\left(\vec{a}_4+\vec{a}_1\right)=\vec{0}$。当 $c_1=1$、$c_2=-1$、$c_3=1$、$c_4=-1$ 时，上式成立。也就是说，c_1、c_2、c_3、c_4 **不全为 0** 时，上式能成立。根据本章的第三车砖可知，（B）选项中的四个向量是线性相关的。

（C）选项：$c_1\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)+c_2\left(\vec{a}_2+\vec{a}_3\right)+c_3\left(\vec{a}_3-\vec{a}_4\right)+c_4\left(\vec{a}_4-\vec{a}_1\right)=\vec{0}$。当 $c_1=1$、$c_2=-1$、$c_3=1$、$c_4=1$ 时，上式成立。也就是说，c_1、c_2、c_3、c_4 **不全为 0** 时，上式能成立。根据本章的第三车砖可知，（C）选项中的四个向量是线性相关的。

（D）选项：由于（A）、（B）、（C）三个选项都不能选，所以（D）选项肯定为答案，这是毫无疑问的，但是我们现在是学知识，不是考试，所以我还是来解释一下为什么选（D）。要解释（D）选项，就不能按（A）、（B）、（C）三个选项那样解释了。因为（A）、（B）、（C）三个选项相当于是找反例，（D）选项是正确的，当然没有反例，所以，我换一种思路来解释（D）选项为什么是正确的。

大家还记得第 1 章的房间 104 吧，此选项我们就用第 1 章房间 104 所讲的方法做。根据第 1 章的房间 104，有：

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\ \vec{a}_2+\vec{a}_3,\ \vec{a}_3+\vec{a}_4,\ \vec{a}_4-\vec{a}_1)=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

等式两边同时取行列式，得：

$$|\vec{a}_1+\vec{a}_2, \ \vec{a}_2+\vec{a}_3, \ \vec{a}_3+\vec{a}_4, \ \vec{a}_4-\vec{a}_1| = \left|\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \begin{vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

由于$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$线性无关（已知条件），根据房间 303 的定理 3 的①可以知道，向量组：$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$、$\vec{a}_4$的秩为 4。

根据本章第六车砖（向量组的秩等于矩阵的秩）可以知道，矩阵$\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}$的秩为 4。而矩阵$\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}$是四阶方阵，所以矩阵$\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}$满秩。

根据第 2 章房间 201 的大总结，$\begin{vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{vmatrix} \neq 0$。

通过计算可以知道，$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$。

因为$\begin{vmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{vmatrix} \neq 0$，$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix} \neq 0$，而$|\vec{a}_1+\vec{a}_2, \ \vec{a}_2+\vec{a}_3, \ \vec{a}_3+\vec{a}_4, \ \vec{a}_4-\vec{a}_1|$为两者相乘，两个不为零的数相乘一定也不为零，所以有：$|\vec{a}_1+\vec{a}_2, \ \vec{a}_2+\vec{a}_3, \ \vec{a}_3+\vec{a}_4, \ \vec{a}_4-\vec{a}_1| \neq 0$。

根据第 2 章的房间 201 的大总结可以知道，矩阵（$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$）

满秩，即矩阵（$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$）的秩为 4。

根据本章的第六车砖（向量组的秩等于矩阵的秩）可得，向量组：$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$的秩为 4。

根据房间 303 的定理 3 的①可得，向量组：$\vec{a}_1+\vec{a}_2$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3$，$\vec{a}_3+\vec{a}_4$，$\vec{a}_4-\vec{a}_1$是线性无关的。所以此题的答案为（D）选项。

同学们，看见了吧，关于 D 选项的解释用到了很多知识。但是，你们千万不要觉得这题难。我告诉大家，你们只要是按我说的，把每章的“房间”都默写下来，那么等你们看完此书后，做这种题肯定会非常快。

3.12　房间 304——线性表出的本质

早在本章的第二车砖中，我就给大家讲了线性表出的概念。现在我要告诉大家的是：**线性表出的本质其实就是房间 302 中讲的解方程组。**也许大家不太理解我的意思，没有关系。我来举个例子。

例．已知$\vec{\alpha}_1=(1,0,1,0)^T$，$\vec{\alpha}_2=(2,2,-2,2)^T$，$\vec{\alpha}_3=(3,1,1,1)^T$，$\vec{\beta}=(4,-1,6,-1)^T$。问$\vec{\beta}$能不能由$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$线性表出？若能，请写出表达式。

解：根据本章第二车砖所讲，若能找出常数c_1、c_2、c_3，使得$\vec{\beta}=c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2+c_3\vec{\alpha}_3$，就说明$\vec{\beta}$可以由$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$线性表出，那么现在我们就是要找出这$c_1$、$c_2$、$c_3$。也就是说，$c_1$、$c_2$、$c_3$是未知数，那么，要找出$c_1$、$c_2$、$c_3$就相当于解方程组：

$$\vec{\beta}=x_1\vec{\alpha}_1+x_2\vec{\alpha}_2+x_3\vec{\alpha}_3$$

展开得：

$$\begin{pmatrix}4\\-1\\6\\-1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\2\\-2\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

继续展开得：

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=4\\2x_2+x_3=-1\\x_1-2x_2+x_3=6\\2x_2+x_3=-1\end{cases}$$

然后按照房间302所讲的方法去解这个非齐次方程组即可。若无解，则说明$\vec{\beta}$不能由$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$线性表出；若有唯一解，则说明$\vec{\beta}$可以由$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$线性表出，且$\vec{\beta}=c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2+c_3\vec{\alpha}_3$中的$c_1$、$c_2$、$c_3$只有一组取值；若有无穷多解，则说明$\vec{\beta}$可以由$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$线性表出，且$\vec{\beta}=c_1\vec{\alpha}_1+c_2\vec{\alpha}_2+c_3\vec{\alpha}_3$中的$c_1$、$c_2$、$c_3$有无穷多组取值。

求解过程就省略了。最后解得：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\0\\-1\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数（当然，我在房间302中讲这一块的时候说过，答案的形式不唯一）。

所以$\vec{\beta}$可以由$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$、$\vec{\alpha}_3$线性表出，表出式为：$\vec{\beta}=(4k+7)\vec{\alpha}_1+k\vec{\alpha}_2-(2k+1)\vec{\alpha}_3$

3.13　房间305——初等行变换前后相应的列向量组具有相同的线性相关性

本节是很有意思的一节，有意思之处在于：本节的标题就是具体的知识点。也就是说，我只要把本节的标题给大家解释明白，那么本节就算讲完了，很有意思吧。

好，现在我通过举例来解释一下本节标题的意思。比如有一个五行四列的矩阵，现在对此矩阵进行若干次（随便多少次都行）初等行变换（**记住，进行的是行变换而不是列变换，就三种：互换两行、某行乘以 *k*（*k*≠0）、某行乘以 *k* 后加到另外一行**），不管变换了多少次，最后得到的矩阵肯定还是五行四列的矩阵，这是是毫无疑问的。好，那么若最后得到的矩阵中的这四个**列向量**是线性相关的（线性无关的），则最原始的（没有经过任何行变换的）那个矩阵中的四个**列向量**也是线性相关的（线性无关的）。

大家明白了吧？**而且也不一定非得是四个列向量全看**，比如我现在就取最后得到的矩阵的第二列和第四列（刚才是四个列向量全看），如果这两列是线性相关的（线性无关的），则最原始的（没有经过任何行变换的）那个矩阵中的第二列和第四列也是线性相关的（线性无关的）。

这就叫“初等行变换前后相应的列向量组具有相同的线性相关性”。

并且，由此我们还可以推出这样一件事：**初等行变换前后列向量组的最大无关组也可以“相应”**。还是拿上例中那个五行四列的矩阵来举例，如果进行了若干次初等行变换后最后得到的矩阵中的四个列向量的一个最大无关组是第一列、第二列、第四列，则最原始的（没有经过任何行变换的）矩阵中的第一列、第二列、第四列是最原始的矩阵的四个列向量的一个最大无关组。

考研题 3.7　求向量组 $\vec{a}_1=(1,2,1,3)^T$，$\vec{a}_2=(1,1,-1,1)^T$，$\vec{a}_3=(1,3,3,5)^T$，$\vec{a}_4=(4,5,-2,7)^T$，$\vec{a}_5=(-3,-5,-1,-7)^T$ 的秩和一个最大无关组，并将其余的向量用最大无关组线性表出。

解：这道题共三问，现在我们按顺序来做。

（1）求向量组的秩。

根据本章第六车砖（矩阵的秩等于向量组的秩）来求向量组的秩。

$$A=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 & \vec{a}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\2&1&3&5&-5\\1&-1&3&-2&-1\\3&1&5&7&-7\end{pmatrix}$$

由于 4<5，2(4-1)=6，所以将矩阵 A 化为阶梯形矩阵需要六步。

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\0&1&-1&3&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以矩阵 A 的秩为 3，所以向量组：$\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$ $\vec{a}_3$ $\vec{a}_4$ $\vec{a}_5$ 的秩为 3。

（2）求向量组的一个最大无关组。

为什么是“一个”？因为我早就讲过，一个向量组的最大无关组可能不止一个。所以题目的意思是：只要求出一个就可以了，明白了吧。一般来说，求最大无关组的题都会加修饰语“一个”。

好，咱们继续讲，想求出最大无关组，我们首先需要求出最大无关组中包含几个向量。在本章的第五车砖中，我就告诉过大家，向量组的秩指的就是向量组的最大无关组中包含向量的个数（大家可不要光记着房间 303 的定理 3 跟向量组的秩有关，而忽略了向量组的秩的定义啊），所以我们首先需要求向量组的秩，而向量组的秩我们在第一问已经求完了，现在就不用再求了，由此我们可以知道，此题就算没有第一问而只有第二问，我们也必须求向量组的秩。

好，现在我们对阶梯形矩阵继续进行初等行变换（因为只有进行初等行变换而不是列变换，才能利用的上房间 305 中所讲的知识）。第三行乘以−3 加到第二行；第三行乘以−4 加到第一行，即：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

再把第二行乘以−1 加到第一行，即：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

大家现在可能觉得很奇怪，奇怪之处在于不明白我为什么要做上述变换，现在我来解释一下。之所以做上述变换，就是为了把第一列变为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，把第二列变为$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，把第四列

变为$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$。那我又为什么要把这三列变成这样呢？别急，我现在就要讲。设$\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_5=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$。现在先来告诉大家这样一个结论：一个向量组，无论该向量组包含多少个向量，只要其中包含单位向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$，…，$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$，则该单位向量组一定是该向量组的一个最大无关组。

比如有一个向量组，其中包含的都是三维列向量，假设这个向量组中包含了一万个向量，很多是吧，但只要这一万个向量中有$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$这三个向量，则$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$就是此包含了一万个向量的向量组的一个最大无关组。

那么现在也一样，对于向量组：$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$而言，向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$就是它的一个最大无关组。

接着我再告诉大家一个结论。若向量组 A 是向量组 B 的一个最大无关组，现在把向量组 A 中的每个向量都增加一维，且增加的数字全是零，形成新的向量组 A′；把向量组 B 中的每个向量也同样都增加一维，且增加的数字也全是零，形成新的向量组 B′。则：向量组 A′ 是向量组 B′ 的一个最大无关组。

好，现在就应用该结论做这道题。向量组：$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$增加一维全零的数之后形成

的向量组正好是$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_4$。而向量组$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$增加一维全零的数之后形成的向量组正好是$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3,\vec{\beta}_4,\vec{\beta}_5$。所以$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_4$是向量组$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3,\vec{\beta}_4,\vec{\beta}_5$的一个最大无关组。

根据房间 305（直到现在，才用上本节的知识点），初等行变换前后列向量组的最大无关组具有“相应”的关系。所以$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$是向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$的一个最大无关组。第二问就做完了。

（3）将其余的向量用最大无关组线性表出。

换句话说，此题的第二问已经求出$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$是向量组$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5$的一个最大无关组了。现在这第三问的意思就是：把$\vec{a}_3$用$\vec{a}_1,\vec{a}_2,,\vec{a}_4$线性表出；把$\vec{a}_5$用$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$线性表出。

同学们，你们看到这里，看到了“线性表出”这四个字，是否立刻想到了房间 304，是否想用解方程组的方法来做这第三问？如果你们这么想，那真是值得表扬，说明你们没有忘记房间 304 所讲的知识。不过对于这道题来说，那样做的话过程比较麻烦（当然也可以那样做），这道题用一个小技巧来做会简单很多。

因为$\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}_5=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，可以很明显地看出：$\vec{\beta}_3=2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2+0\vec{\beta}_4=2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$，$\vec{\beta}_5=-2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2+0\vec{\beta}_4=-2\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$。所以立刻可以得出$\vec{a}_3=2\vec{a}_1-\vec{a}_2$，$\vec{a}_5=-2\vec{a}_1-\vec{a}_2$【这是因为矩阵$(\vec{\beta}_1\ \ \vec{\beta}_2\ \ \vec{\beta}_3\ \ \vec{\beta}_4\ \ \vec{\beta}_5)$是矩阵$(\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2\ \ \vec{a}_3\ \ \vec{a}_4\ \ \vec{a}_5)$经过行变换变来的，没有经过列变换，也就是说，原始矩阵的列之间的关系就是行变换后的矩阵列之间的关系】。

3.14　房间 306——与秩有关的八个公式

公式 1： $r(A_{m\times n})\le m$，$r(A_{m\times n})\le n$，$r(A_{m\times n})\le \min(m,n)$

解释：若矩阵 A 是一个 m 行 n 列的矩阵，则：矩阵 A 的秩一定小于等于它的行数 m，也一定小于等于它的列数 n。那么由此，你自己也能推出，矩阵 A 的秩一定小于等于“m 和 n 当中小的那一个数”。

例. $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}$，则不用通过任何计算就可以知道 $r(A)\le 3$，$r(A)\le 4$，3 又比 4 小，所以 $r(A)\le 3$。

公式 2： $r(A)=r(A^T)$

解释：某矩阵的秩与该矩阵转置后所得到的矩阵的秩是一样的。

例. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道 $r(A)=r(B)$，因为矩阵 B 是矩阵 B 经过转置后得到的矩阵。

公式 3：$r(AB)\le r(A)$，$r(AB)\le r(B)$，$r(AB)\le \min(r(A),r(B))$

解释：如果矩阵 A 可以在左边乘矩阵 B 的话（即如果 $A\times B$ 存在的话），则矩阵 AB 的秩小于等于矩阵 A 的秩，也小于等于矩阵 B 的秩。那么由此，你自己也能推出，矩阵 AB 的秩一定小于等于“$r(A)$ 和 $r(B)$ 当中小的那一个数”。

例. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$，$C=AB=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道 $r(C)\le r(A)$，$r(C)\le r(B)$，$r(C)\le \min(r(A),r(B))$。

公式 4： $r(A)+r(B)\ge r(A+B)$

解释：两个矩阵分别求秩，然后把这两个秩相加，相加后所得到的和一定会大于等于这两个矩阵相加后所得到的新矩阵的秩。

例. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}$，$C=A+B=\begin{pmatrix}6&8\\10&12\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道

$r(A)+r(B)\ge r(C)$。

公式 5： $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$ **（n 是 *A* 的列数）**

解释：如果矩阵 *A* 可以在左边乘矩阵 *B* 的话（即如果 *A*×*B* 存在的话），则矩阵 *AB* 的秩一定大于等于矩阵 *A* 的秩加上矩阵 *B* 的秩再减去矩阵 *A* 的列数后所得到的那个数。

例． $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$， $C=AB=\begin{pmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{pmatrix}$， 则不用计算就可以知道 $r(C)\ge r(A)+r(B)-2$。

公式 6：当 $k\ne 0$ **时，** $r(A)=r(kA)$

解释：一个矩阵的秩与该矩阵乘以一个非零常数后得到的矩阵的秩相等。

例． $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$， $B=8A=\begin{pmatrix}8 & 16\\ 24 & 32\end{pmatrix}$，则不用计算就可以知道 $r(A)=r(B)$。

公式 7： $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$**，则** $r(A)$ **+线性无关解向量个数=n（n 是未知数个数）**

解释： $A_{m\times n}\vec{X}=\vec{0}$ 是什么？是一个由 m 个方程 n 个未知数所组成的齐次方程组，这我早就讲过，大家对这一点应该非常清楚。好，那我继续讲，这个公式根本就不是新知识点，而是在我讲房间 302 的齐次方程组的解法时就已经讲过了，只是没有以公式的形式给出来罢了。可能我这么说，大家仍然想不起来房间 302 的齐次方程组的解法与这个公式 7 为什么就是一回事。没有关系，因为接下来我要具体地解释。

在讲房间 302 的齐次方程组的解法时，我曾提到过一个概念，名字叫做“基础解系”，这大家应该还记得吧。**基础解系指的是齐次方程组的解向量组（其中包含无数个解向量）的一个最大无关组。**由此我们可以知道，基础解系中的向量都是齐次方程组的解，并且基础解系中的向量是线性无关的（最大无关组嘛，里面包含的向量必然线性无关啊）。而基础解系中包含向量的个数呢？我早就讲过了，是 n-r 个。也就是说，n-r=齐次方程组线性无关解向量的个数，将该等式移项后即得公式 7，明白了吧。

公式 8： $AB=\mathrm{O}$**，则** $r(A)+r(B)\le n$ **（n 是 *A* 的列数）**

解释：如果公式 7 明白了，那公式 8 就太好理解了，现在我通过举例的方式给大家解释一下公式 8 是怎么来的。

假设矩阵 B 有三列， $B=(\vec{b_1}\vec{b_2}\vec{b_3})$， $A\vec{X}=\vec{0}$ 是一个齐次方程组这毫无疑问吧。那么，根据 $AB=\mathrm{O}$，可以得到 $A\vec{b_1}=\vec{0}$， $A\vec{b_2}=\vec{0}$， $A\vec{b_3}=\vec{0}$，即 $\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$ 都是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$

的解向量。但是谁也没有说$\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$这三个向量是线性无关的，它们很有可能是线性相关的。而且就算$\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$是线性无关的，那毕竟只有三个向量，$r(B)=3$。说不定齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的基础解系中含四个或五个向量呢。所以无论从哪个角度来说，都有：$r(B)\le$“$A\vec{X}=\vec{0}$的基础解系中所包含的向量个数”。再结合公式 7，立刻可以推出公式 8。

考研题 3.8 已知$Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$为三阶非零矩阵，且$PQ=O$，则________。

（A）t=6 时，P 的秩必为 1

（B）t=6 时，P 的秩必为 2

（C）t≠6 时，P 的秩必为 1

（D）t≠6 时，P 的秩必为 2

解：当 t=6 时，$r(Q)=1$，又$PQ=O$，根据公式 8，$r(P)+r(Q)\le p\text{的列数}=3$，即$r(P)+r(Q)\le 3$。题中说了，$P$为非零矩阵。我们知道，只有零矩阵的秩才是零，所以$r(P)\ge 1$。由于$r(P)+r(Q)\le 3$，$r(Q)=1$，得$r(P)\le 2$。所以$r(P)\ge 1$，$r(P)\le 2$，故：$r(P)=1\text{或}r(P)=2$。故（A）、（B）选项都不能选。

当 t≠6 时，$r(Q)=2$，又$PQ=O$，根据公式 8，$r(P)+r(Q)\le p\text{的列数}=3$，即：$r(P)+r(Q)\le 3$。又$r(Q)=2$，得$r(P)\le 1$。又因为$P$为非零矩阵，所以$r(P)\ge 1$。所以$r(P)\le 1$，$r(P)\ge 1$，故：$r(P)=1$。选择（C）选项。

答案：（C）。

考研题 3.9 设A是三阶矩阵，满足$A^2=E$，但$A\ne\pm E$，则必有________。

（A）$r(A-E)=1$

（B）$r(A-E)=2$

（C）$(r(A-E)-1)\times(r(A+E)-1)=0$

（D）$(r(A-E)-1)\times(r(A+E)-1)=1$

解：由于 $A^2=E$，所以 $A^2-E=O$，所以 $A^2-E^2=O$，所以 $(A+E)(A-E)=\mathrm{O}$。根据公式 8，有 $r(A+E)+r(A-E)\le 3$。由于 $A\ne\pm E$，所以矩阵 $A+E$，矩阵 $A-E$ 的秩均大于等于 1，即 $r(A+E)\ge 1$，$r(A-E)\ge 1$。结合 $r(A+E)+r(A-E)\le 3$ 可知，$r(A-E)\le 2$，$r(A+E)\le 2$。即 $1\le r(A-E)\le 2$，$1\le r(A+E)\le 2$。并且 $r(A-E)$、$r(A+E)$ 不能同时为 2，否则加起来就是 4 了，就超过 3 了。所以 $r(A-E)$、$r(A+E)$ 中至少有一个是 1，但到底谁是 1 就不好说了。也就是说，要么 $r(A-E)-1=0$，要么 $r(A+E)-1=0$，要么两者都是 0。所以选择 C 选项。

答案：（C）。

3.15　房间 307——向量空间

3.15.1　向量空间，基，维数，坐标

1. 向量空间

向量空间就是向量组，而且是特殊的向量组，特殊性体现在：这个向量组中的任意两个向量相加后所得到的向量仍然在该向量组中（举个例子，比如向量组 A 中一共就包含了三个向量，分别是：为 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，而 $\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$，那么向量组 A 很显然就不能被称为向量空间，因为，而不在向量组 A 中）。光满足这一个条件的向量组还不能被称为向量空间，一个向量组要想成为向量空间，还需要满足一个条件。就是：这个向量组中的任意一个向量乘以常数 k 后所得到的向量仍然在该向量组中。一旦某向量组同时满足这两个条件，那么我们就称此向量组为向量空间。最后说一句：一个向量组要想成为向量空间，**满足这一个条件的向量组还不能被称为向量空间，一个向量组要想成为向量空间，还需要满足一个条件。就是：这个向量组中的任意一个向量乘以常数 k 后所得到的向量仍然在该向量组中。一旦某向量组同时满足这两个条件，那么我们就称此向量组为向量空间。最后说一句：一个向量组要想成为向量空间，其中一般都包含有无数个向量。**

空间的含义是实数域上的全体 n 维向量。换句话说，n 维向量空间指的是一个向量组，这个向量组中包含了所有的 n 维向量。例如：三维向量空间是一个向量组，该向量组中包含了所有的三维向量。n 维向量空间用符号 R^n 来表示。

2. 基

“基”的意思就是最大无关组，正如同“基础解系”的意思是最大无关组一样。也就

是说：基、基础解系、最大无关组这三者其实指的都是最大无关组，区别只是在于：最大无关组是最一般的概念，而基础解系和基都是在某种特定情况下的最大无关组而已。“基础解系”是“齐次方程组的解向量”这一特定的向量组的最大无关组，而“基”是“向量空间”这一特定的向量组的最大无关组。举个例子来说，我给了向量组 A：$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} m \\ n \\ o \end{pmatrix}$。假设$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$是向量组 A 的一个最大无关组，则$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}$仅仅能称为向量组 A 的一个最大无关组，而不能称为向量组 A 的一个基。因为向量组 A 不是向量空间，只是由五个向量组成的向量组而已。只有向量空间的最大无关组才能被称为基。

3. 向量空间的维数

首先我要提醒大家的是，大家千万别把“向量空间的维数”和“向量的维数”这两个概念弄混淆了。

“向量的维数”我们早就讲过，比如向量$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$的维数就是 **3**，一眼就能看出来，这叫“向量的维数”。好，言归正传，我现在要给大家讲向量空间的维数。我刚刚讲完的“基”实际上指的就是“最大无关组”，而“向量空间的维数”实际上指的就是“向量组的秩”。

举个例子来说，“三维向量空间”指的是“一个秩为 3 的向量空间”，现在大家都明白了吧。另外要告诉大家的是，**n** 维向量空间用符号 R^n 来表示。

最后给大家总结一下，“基”和“向量空间的维数”实际上指的就是“最大无关组”和“向量组的秩”。那么由此我们可以推出：一个向量空间的维数是多少，该向量空间的基中就会包含多少个向量。

4. 坐标

刚刚我说“基”是向量空间的最大无关组对吧？那么现在，我们根据最大无关组的定义，直接可得：基中所包含的 **n** 个向量是线性无关的，把该向量空间中的任何一个向量放入到基中形成的 **n+1** 个向量一定是线性相关的。再根据房间 **303** 的定理 **4**，就可以得出这样一个结论：放入到基中的这个向量一定可以由基中的 **n** 个向量线性表出。

下面我用数学语言来描述一下上面的这段话：

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ 是 **n** 维向量空间 R^n 的一个基，则 R^n 中的任意一个向量 $\vec{b}$ 都可以写成：

$\vec{b}=c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2+c_3\vec{a}_3+\cdots c_n\vec{a}_n$ （其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为常数）

说了这么半天，还没说什么叫坐标呢。别急，现在就说，向量 $(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$ 成为向量 $\vec{b}$ 在基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 下的坐标。

考研题 3.10 已知 $\vec{a}_1=(1,1,0)^T$， $\vec{a}_2=(0,1,1)^T$， $\vec{a}_3=(-1,2,1)^T$ 是 R^3 的一个基，则向量 $\vec{b}=(0,0,4)^T$ 在该基下的坐标是______。

解：设向量 $\vec{b}=(0,0,4)^T$ 在该基下的坐标是 $(x_1,x_2,x_3)^T$。根据坐标的定义，有：

$$\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

展开得：

$$\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=0\\x_2+x_3=4\end{cases}$$

这是一个非齐次方程组，我们只需按照房间 302 给出的非齐次方程组的解法解出 x_1、x_2、x_3 就可以了。

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&2&0\\0&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&0\\0&1&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&0\\0&0&-2&4\end{pmatrix}$$

$r_1=r_2=n=3$，所以该非齐次方程组有唯一解，此时根本不用进行房间 302 中讲的非齐次方程组的解法的第三步了，直接将矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&0\\0&0&-2&4\end{pmatrix}$ 转化为方程组：

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_3 = 4 \end{cases}，解得\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

所以此题的答案为：$(-2,6,-2)^T$

3.15.2　基变换公式

我早就说过，一个向量组的最大无关组很可能不止一个，而基作为向量空间的最大无关组，所以向量空间的基当然也很可能不止一个。本节我们要讨论的知识点（基变换公式）涉及到向量空间的两个基。

若 $\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_n}$ 和 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_n}$ 是 R^n 的两个基，且：

$$\left(\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_n}\right)=\left(\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_n}\right)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}=\left(\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_n}\right)C \qquad ①$$

则①式称为由基 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_n}$ 到基 $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$ 的基变换公式，矩阵 **C** 称为由基 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_n}$ 到基 $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$ 的过渡矩阵。

考研题 3.11　设 $\vec{a_1}=(1,0,1)^T$，$\vec{a_2}=(1,1,-1)^T$，$\vec{a_3}=(1,-1,1)^T$ 是 R^3 的一个基，$\vec{b_1}=(3,0,1)^T$，$\vec{b_2}=(2,0,0)^T$，$\vec{b_3}=(0,2,-2)^T$ 也是 R^3 的一个基。

（1）求基 $\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_n}$ 到基 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_n}$ 的过渡矩阵。

（2）已知 $\vec{c}$ 在基 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_n}$ 下的坐标为 $(1,2,0)$，求 $\vec{c}$ 在基 $\vec{a_1},\vec{a_2},...,\vec{a_n}$ 下的坐标及 $\vec{c}$。

解：

（1）根据刚刚讲完的基变换公式，有：

$$\begin{pmatrix}\vec{b_1} & \vec{b_2} & \vec{b_3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a_1} & \vec{a_2} & \vec{a_3}\end{pmatrix}\times 过渡矩阵$$

即：

$$\begin{pmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\times\text{过渡矩阵}$$

等式两边同时左乘$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$，得：

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\times\text{过渡矩阵}$$

$$=\mathrm{E}\times\text{过渡矩阵}$$

$$=\text{过渡矩阵}$$

通过计算，可知：$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$

所以：过渡矩阵$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

（2）我们先来求$\vec{c}$。根据坐标的定义，直接可得：

$$\vec{c}=1\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}$$

再来求$\vec{c}$在基$\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$下的坐标。设向量$\vec{c}=(7,0,1)^T$在基$\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$下的坐标是$(x_1,x_2,x_3)^T$。根据坐标的定义，有：

$$\begin{pmatrix}7\\0\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

展开得：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=7\\ x_2-x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=1\end{cases}$$

这是一个非齐次方程组，我们只需按照房间 302 给出的非齐次方程组的解法解出 x_1,x_2,x_3 就可以了。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&-1&0\\1&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&-1&0\\1&-2&0&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&-1&0\\0&0&-2&-6\end{pmatrix}$$

$r_1=r_2=n=3$，所以该非齐次方程组有唯一解，此时根本不用进行房间 302 中讲的非齐次方程组的解法的第三步了。直接将矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1&7\\0&1&-1&0\\0&0&-2&-6\end{pmatrix}$ 转化为方程组。

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=7\\ x_2-x_3=0\\ -2x_3=-6\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x_1=1\\ x_2=3\\ x_3=3\end{cases}$$

所以 $\vec{c}$ 在基 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 下的坐标是 $(1,3,3)^T$ 。

3.15.3　正交向量，正交矩阵，正交化

1. 正交向量

先来介绍一下正交向量的概念。两个维数相同的行向量（或列向量），若对应位置的数字相乘再相加后为零，则称这两个向量正交。

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\10\\-8\end{pmatrix}$，问$\vec{a}$、$\vec{b}$是否正交?

解：由于$1\times4+2\times10+3\times(-8)=0$，所以$\vec{a}$、$\vec{b}$正交。

“对应位置相乘再相加”实际上是一个专业术语：内积。

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$，求$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积?

解：$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积$=1\times4+2\times5+3\times6=32$

向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$的内积记为$(\vec{a},\vec{b})$。

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$，求$(\vec{a},\vec{b})$?

解：$(\vec{a},\vec{b})=1\times4+2\times5+3\times6=32$

综上所述，就总结为一句话：若两个向量的内积为零，则称这两个向量正交。

2. 正交矩阵

知道了两个向量正交的概念之后，现在我来给大家介绍一个非常重要的概念，这个概念会应用到后续的很多章节中，这就是：正交矩阵。

我们先来看一下正交矩阵的定义。**正交矩阵的定义是：如果矩阵A满足$A^TA=AA^T=E$，则称矩阵A为正交矩阵，简称正交阵。**

好，我现在问大家一个问题，大家还记得矩阵A和矩阵A^{-1}所满足的关系吗？如果忘记了的话，我给大家提个醒：$AA^{-1}=A^{-1}A=E$。由此，我们立刻可以得到**正交矩阵的等价定义：如果矩阵A满足$A^T=A^{-1}$，则称矩阵A为正交矩阵。**

以上介绍了正交矩阵的定义以及等价定义。看到这里，大家可能觉得正交矩阵与我刚刚讲过的两个向量正交没什么关系。然而，事实却并非如此，接下来我要给大家讲一下矩阵A为正交矩阵的充分必要条件，这个充分必要条件就与刚刚讲过的两个向量正交有非常密切的关系。

A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 中的任意两个行向量都是正交的，且 A 中的任意一个行向量都是单位向量 $\Leftrightarrow$ A 中的任意两个列向量都是正交的，并且 A 中的任意一个列向量都是单位向量。

以上就是正交矩阵的充分必要条件。此充分必要条件中提到了“单位向量”一词。这是什么意思呢？非常简单：**对于向量 $\vec{a}$，$\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$ 称为 $\vec{a}$ 的模，$\vec{a}$ 的模记为 $\left|\vec{a}\right|$。如果向量 $\vec{a}$ 的模为 1，则称向量 $\vec{a}$ 为单位向量。**

例．$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，求 $\vec{a}$ 的模 $\left|\vec{a}\right|$。

解：$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{1\times1+2\times2+3\times3}=\sqrt{14}$（顺便说一句，$\vec{a}$ 不是单位向量，因为 $\vec{a}$ 的模 $\left|\vec{a}\right|$ 不是 1）

考研题 3.12　设 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & a & b\\ c & 1 & d\\ e & f & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，且知 A 是正交阵，则 $A=$_______。

解：此题给出了矩阵 A，却又让求矩阵 A，很显然出题人是想让同学们求出 a,b,c,d,e,f。

根据正交阵的充分必要条件，向量 $(c,1,d)$，向量 $\begin{pmatrix}a\\1\\f\end{pmatrix}$ 都是单位向量（模为 1 的向量）。

所以有：$\sqrt{c^2+1+d^2}=1$，解得：c=0，d=0。

$\sqrt{a^2+1+f^2}=1$，解得：a=0，f=0。

根据正交阵的充分必要条件，向量 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,b\right)$，向量 $\left(e,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 都是单位向量（模为 1 的向量）。

所以有：$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0+b^2}=1$，解得：$b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。

$\sqrt{e^2+0+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$，解得：$e=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。

根据正交阵的充分必要条件，矩阵的第一列和第三列必正交，即：$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\e\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}b\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$必正交。

所以有：$\frac{1}{\sqrt{2}}b+0+\frac{1}{\sqrt{2}}e=0$，解得$b=-e$。

所以当$b=\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$e=-\frac{1}{\sqrt{2}}$；当$b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$e=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

所以$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$或$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

考研题 3.13 求一个与$\vec{a}_1=(1,1,-1,1)^T$，$\vec{a}_2=(1,-1,-1,1)^T$，$\vec{a}_3=(2,1,1,3)^T$都正交的单位向量。

解：我们来看这道题。设所求向量为$\vec{b}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$。

由于所求向量与$\vec{a}_1=(1,1,-1,1)^T$正交，则有：$\left(\vec{b},\vec{a}_1\right)=0$，即$x_1+x_2-x_3+x_4=0$；

由于所求向量与$\vec{a}_2=(1,-1,-1,1)^T$正交，则有：$\left(\vec{b},\vec{a}_2\right)=0$，即$x_1-x_2-x_3+x_4=0$；

由于所求向量与$\vec{a}_3=(2,1,1,3)^T$正交，则有：$\left(\vec{b},\vec{a}_3\right)=0$，即$2x_1+x_2+x_3+3x_4=0$。

综上所述，有齐次方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2-x_3+x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+3x_4=0\end{cases}$$

利用本章房间 302 中所讲的方法去求解此齐次方程组即可，解法如下。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

由于矩阵 A 的秩为 3，小于未知数个数 4，所以该齐次方程组有无穷多组解。

所以：

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=0\\ x_2=0\\ 3x_3+x_4=0\end{cases}$$

又因为 $n-r=4-3=1$，所以说明四个未知数中只有一个未知数可以自由取值并且只取一组。

我选择 x_3（选择 x_1、x_4 也可以）为自由取值的变量，并且我取的是 $x_3=-1$。解得该齐次方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$。

所以 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$，其中 C 为任意常数，而题中说 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ 为单位向量，即：$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}=1$，也就是 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$。

把 $x_1=-4C,x_2=0,x_3=-C,x_4=3C$ 代入到 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$ 中，解得 $C=\dfrac{\pm1}{\sqrt{26}}$，所以所求向量 $\vec{b}=\dfrac{\pm1}{\sqrt{26}}\left(-4,0,-1,3\right)^T$。

3. 正交化

这一节的最后，我要给大家讲的知识点是“正交化”。什么叫“正交化”呢？我举个例子来说，比如我给出三个向量，这三个向量并不是两两正交的向量，我让你们通过某种方法把这三个向量化为两两正交的向量，这个过程就是“正交化”。

现在大家已经知道了正交化的含义，那么到底如何正交化呢？这就是我马上要讲的“**施密特正交法**”。

下面开始介绍施密特正交法。有 n 个向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$，施密特正交法如下：

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{(\vec{a}_2,\vec{b}_1)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)}\times\vec{b}_1$$

$$\vec{b}_3=-\frac{\left(\vec{a}_3,\vec{b}_1\right)}{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}\times\vec{b}_1-\frac{\left(\vec{a}_3,\vec{b}_2\right)}{\left(\vec{b}_2,\vec{b}_2\right)}\times\vec{b}_2$$

……

$$\vec{b}_n=\vec{a}_n-\frac{\left(\vec{a}_n,\vec{b}_1\right)}{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}\times\vec{b}_1-\frac{\left(\vec{a}_n,\vec{b}_2\right)}{\left(\vec{b}_2,\vec{b}_2\right)}\times\vec{b}_2-\cdots-\frac{\left(\vec{a}_n,\vec{b}_{n-1}\right)}{\left(\vec{b}_{n-1},\vec{b}_{n-1}\right)}\times\vec{b}_{n-1}$$

则 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 即为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_n$ 经正交化之后所得到的正交向量组，即 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_n$ 中的向量两两正交。

考研题 3.14 用施密特正交法将向量组 $\vec{a}_1=(1,-1,1)^T$，化为标准正交向量组。

解：利用刚刚讲完的施密特正交法。

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{(\vec{a}_2,\vec{b}_1)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)}\times\vec{b}_1$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{(-1)\times1+1\times(-1)+1\times1}{1\times1+(-1)\times(-1)+1\times1}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\left(-\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3=-\frac{\left(\vec{a}_3,\vec{b}_1\right)}{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}\times\vec{b}_1-\frac{\left(\vec{a}_3,\vec{b}_2\right)}{\left(\vec{b}_2,\vec{b}_2\right)}\times\vec{b}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1\times1+1\times(-1)+(-1)\times1}{1\times1+(-1)\times(-1)+1\times1}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}-\frac{1\times\left(-\frac{2}{3}\right)+1\times\left(\frac{2}{3}\right)+(-1)\times\frac{4}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}}\times\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

好，现在我们把 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 都求出来了，这难道就是最后的答案吗？不，这不是。如果此题问的是“正交向量组”，那么 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ 就是最后的答案了。**但实际上，此题问的是“标准**

正交向量组”，多了“标准”两字，这是什么意思呢？这意味着最终得到的向量不仅仅是两两正交的，而且每一个向量都必须是单位向量，即每一个向量的模都必须为 1，这就是“标准”两字的含义。所以$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$并不是最后的答案，我们还需要将$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$化为单位向量才行（也称将$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$单位化）。把一个向量化为单位向量的方法是用该向量除以它的模。

$\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，模为$\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$，所以$\vec{b}_1$化为单位向量后为$\vec{c}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{b}_2=\dfrac{2}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，如果要计算$\vec{b}_2$的模的话，则计算量比较大，因为带分数。在这里教大家一招：不用管向量外面的$\dfrac{2}{3}$了，直接计算$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$的模。$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$的模为$\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$，所以$\vec{b}_2$化为单位向量后为$\vec{c}_2=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$。

$\vec{b}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，模为$\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$，所以$\vec{b}_3$化为单位向量后为$\vec{c}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$。

综上所述，$\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3$为所求的标准正交向量组。

考研题 3.15 设 A 是 5×4 矩阵，$r(A)=2$。$\vec{a}_1=(1,1,2,3)^T$、$\vec{a}_2=(-1,1,4,-1)^T$、$\vec{a}_3=(5,-1,-8,9)^T$是齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的解向量，求$A\vec{X}=\vec{0}$的解空间的标准正交基。

解：由于矩阵A是五行四列的矩阵，所以$A\vec{X}=\vec{0}$是由五个方程四个未知数组成的齐次方程组。又因为$r(A)=2$，根据房间 306 中的公式 7，可以知道齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的基础

解系中含 4-2=2 个解向量。而此题给出了齐次方程组的三个解向量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$，所以这三个解向量肯定是线性相关的。根据房间 301，两个不成比例的向量是线性无关的，所以 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 是线性无关的，又因为齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中含两个向量，所以 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 可以作为齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的一个基础解系。

下面我将此题所问的问题说得再明白一点。此题的问题是“求 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解空间的标准正交基”，意思是“求齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的一个基础解系（翻译“解空间的基”），并且基础解系中的向量还得是两两正交的（翻译“正交”），并且基础解系中的向量还必须是单位向量（翻译“标准”）”。

刚才我们已经证明了向量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的一个基础解系，我们现在要做的就是把向量 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 先利用施密特正交法正交化，然后再将正交化之后所得的两个向量单位化（单位化的意思就是将向量除以模，使其变为单位向量）即可。

正交化的过程如下：

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\vec{b}_2&=\vec{a}_2-\frac{(\vec{a}_2,\vec{b}_1)}{(\vec{b}_1\times\vec{b}_1)}\times\vec{b}_1\\
&=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{(-1)\times1+1\times1+4\times2+(-1)\times3}{1\times1+1\times1+2\times2+3\times3}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4\\2\\10\\-6\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

再将 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$ 单位化：

$$\vec{c}_1=\frac{\vec{b}_1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2+3^2}}=\frac{\vec{b}_1}{\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2=\frac{\begin{pmatrix}-4\\2\\10\\-6\end{pmatrix}}{\sqrt{16\ +4+100+36}}=\frac{1}{\sqrt{156}}\begin{pmatrix}-4\\2\\10\\-6\end{pmatrix}$$

$\vec{c}_1$、$\vec{c}_2$ 就是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解空间的标准正交基。这道题做完了，这道题的答案很明显是不唯一的。比如 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$ 也不成比例，说明 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$ 也可以作为齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系。

3.16　房间 308——线性相/无关的证明题

在考研数学线性代数学科中，线性相/无关的证明题是经常会考到的一种题型。在这一节中，我就要给大家总结一下线性相/无关的证明题的解题方法。

线性相/无关的证明题的解题方法有两种。

- 一种是利用向量组的秩来证明线性相/无关；
- 另一种是利用线性相/无关的定义来证明线性相/无关。

3.16.1　方法 1

利用向量组的秩来证明线性相/无关并不是新的知识点，而是早就讲过的房间 303 中定理 3 的①。如果你忘记了的话，那就赶快翻回去看看吧。

好，现在我假设你们还记得房间 303 中定理 3 的①，我现在要举个例子让你们看看如何利用房间 303 中定理 3 的①来证明线性相/无关。

例如有五个向量，它们组成了一个向量组，要想判断这五个向量是线性相关的还是线性无关的，只需计算一下该向量组的秩就行了。如果算出此向量组的秩小于 5，则说明这五个向量是线性相关的；如果算出此向量组的秩等于 5，则说明这五个向量是线性无关的；如果算出此向量组的秩大于 5，则说明你算错了，赶快重新算一遍吧！

现在大家明白什么叫“利用向量组的秩来证明线性相/无关”了吧。虽然这很简单，虽然我也举例了，但我还是以定理的形式给大家写出来吧：

要想判断 n 个向量所组成的向量组是线性相关的还是线性无关的，只需计算一下该向量组的秩 r（转化为计算矩阵的秩）就行了。如果向量组的秩 r<n，则说明这 n 个向量所组成的向量组是线性相关的；如果向量组的秩 r=n，则说明这 n 个向量所组成的向量组是线性无关的。

考研题 3.16　设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，E 是 n 阶单位阵，若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关。

解：根据题意，矩阵 B 有 m 行 n 列，此题让证明 B 的列向量组线性无关，也就是说，此题让证明的是矩阵 B 的 n 个列向量是线性无关的。我们就用刚刚讲完的方法（利用向量组的秩）来做这道题，即：我们只需要证明矩阵 B 的 n 个列向量构成的向量组的秩等于 n 就可以了。

根据本章的第六车砖（向量组的秩等于矩阵的秩），我们只要证明矩阵 B 的秩为 n 即可。

根据房间 306 中的公式 1，立刻可以知道 $r(B)\le n$。

根据房间 306 中的公式 2，立刻可以知道 $r(B)\ge r(AB)$，而已知条件中 $AB=E$，所以有 $r(B)\ge r(E)$。此题中的单位矩阵 E 是 n 阶单位矩阵，所以 $r(E)=n$，即 $r(B)\ge n$。

由于 $r(B)\le n$、$r(B)\ge n$，所以 $r(B)=n$，所以 B 的列向量组线性无关。

此题已经证明完了。

3.16.2　方法 2

利用线性相/无关的定义式，再结合左右乘、代入法、反证法来证明线性相/无关。

考研题 3.17　设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $A^k\vec{X}=\vec{0}$ 有解向量 $\vec{a}$，且 $A^{k-1}\vec{a}\ne\vec{0}$，证明：向量组 $\vec{a},A\vec{a},\cdots,A^{k-1}\vec{a}$ 线性无关。

解：同学们，当你们刚读完这道题时，是否会认为此题比较难？实际上，这道题一点儿也不难，请看接下来的讲解。

首先，这是一道证明线性无关的题，我之前已经说了，凡是线性相/无关的证明题，就只有两种方法，这两种方法就是刚刚讲完的方法 1 和方法 2。此题明显是用方法 2 做而不是用方法 1 做。

当同学们看到这里时，心中可能会产生疑问，为什么这道题只能用方法 2 做而不能用方法 1 做呢？为什么刚才那道题可以用方法 1 做呢？我现在来回答一下这个问题。

刚才的题之所以用方法 1（利用向量组的秩）来证明，是因为：刚才的题目的问题中的那些向量都是矩阵 B 的列向量，所以上道题目中求出矩阵 B 的秩就相当于求出了问题中那些向量所组成的向量组的秩。这道题则不同，这道题的问题中的那些向量所组成的矩阵在题中根本没有给，这就说明这道题如果用方法 1 做的话可能会非常麻烦或者根本就做不出来，因此我们选择方法 2 来做这道题。

以上说了这么多，其实我想表达的意思很简单，那就是：此题用方法 2 做。方法 2 是什么呢？是利用线性相/无关的定义式。那好，那我们就把定义式写出来。

$$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2A\vec{a}+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\vec{a}=\vec{0} \qquad ①式$$

此题让证明的是线性无关，即证：只有当 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 都为 0 时，上式才成立。

请大家再次看一下方法 2 到底是怎么说的。方法 2 说的是：利用线性相/无关的定义式，再结合左右乘、代入法、反证法来证明线性相/无关。

对于此题来说，写出了定义式之后，再结合左右乘、代入法就能做出来，具体做法如下。

将①式的等式两侧同时左乘 A^{k-1}，得：

$$\lambda_1A^{k-1}\vec{a}+\lambda_2A^k\vec{a}+\ldots+\lambda_kA^{2k-2}\vec{a}=A^{k-1}\vec{0}=\vec{0} \qquad ②式$$

题中说了，方程组 $A^k\vec{X}=\vec{0}$ 有解向量 $\vec{a}$，意思是 $A^k\vec{a}=\vec{0}$，则 $A^{k+1}\vec{a}=A^{k+2}\vec{a}=\cdots=A^{2k-2}\vec{a}=\vec{0}$，将这些都代入②式，得 $\lambda_1A^{k-1}\vec{a}=\vec{0}$。而此题的已知条件中说了，$A^{k-1}\vec{a}\neq\vec{0}$，所以 $\lambda_1=0$。将 $\lambda_1=0$ 代入①式得：

$$\lambda_2A\vec{a}+\lambda_3A^2\vec{a}+\ldots+\lambda_kA^{k-1}\vec{a}=\vec{0} \qquad ③式$$

将③式的等式两侧同时左乘 A^{k-2}，同上可证 $\lambda_2=0$。同理可证 $\lambda_3=\lambda_4=\ldots=\lambda_k=0$，从而得证 $\vec{a},A\vec{a},\ldots,A^{k-1}\vec{a}$ 线性无关。

考研题 3.18　已知 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，证明：$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 线性无关。

错误解法：本题我先来告诉大家一种常见的错误解法。有的同学一看见 $\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$，就立刻想到了第 1 章的房间 104，将矩阵 $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1)$，写为了：

$$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \qquad ①式$$

这很好，完全没有问题，而且我还要表扬这样的同学，因为这样的同学把房间 104 中的知识记得非常熟，同学们是否感到奇怪？这不是错误解法吗？是的，的确是错误解法，只不过到现在为止还没错。请同学们继续看。

将①式的等式两侧取行列式，得：

$$\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right|=\left|(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\times\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right| \qquad ②式$$

$$\Rightarrow\quad \left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right|=\left|(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)\right|\times\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix} \qquad ③式$$

由于题中说 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，根据房间 303 的定理 3 的①，可以知道向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的秩为 3。根据本章的第六车砖（向量组的秩等于矩阵的秩），可以知道矩阵 $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ 的秩为 3。根据第 2 章房间 201 的大总结可知，$\left|\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right|\neq 0$，又通过计算发现 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right|\neq 0$。根据第 2 章房间 201 的大总结可知，矩阵 $(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1)$ 的秩为 3。根据本章的第六车砖（向量组的秩等于矩阵的秩）可知，向量组 $\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 的秩为 3。根据房间 303 的定理 3 的①可知，$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 是线性无关的。

这种做法是错误的。错就错在：想当然地把$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$都当成了三维向量。可实际上，题中根本没有说$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$是三维向量。也就是说，$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$有可能是三维向量也有可能不是三维向量。如果$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$不是三维向量，则：$\left|\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right|$、$\left|\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right|$根本就不存在。比如，如果$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$是四维向量的话，那么矩阵$\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$就是一个四行三列的矩阵，它根本不存在对应的行列式（因为行列式的行数和列数是相等的），所以这种做法是错误的。

正确解法：利用刚刚讲完的方法 2 来做。

$$k_1(\vec{a}_1+\vec{a}_2)+k_2(\vec{a}_2+\vec{a}_3)+k_3(\vec{a}_3+\vec{a}_1)=\vec{0} \qquad \text{①式}$$

①式就是$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$线性相/无关的定义式。如果仅当$k_1$、$k_2$、$k_3$全为零时上式才能成立，则说明$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$是线性无关的。也就是说，我们要证明的是：仅当$k_1$、$k_2$、$k_3$全为零时，①式才能成立。

对①式进行整理，得：

$$(k_1+k_3)\vec{a}_1+(k_1+k_2)\vec{a}_2+(k_2+k_3)\vec{a}_3=\vec{0} \qquad \text{②式}$$

由于题中说$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$是线性无关的，根据线性无关的定义，有：

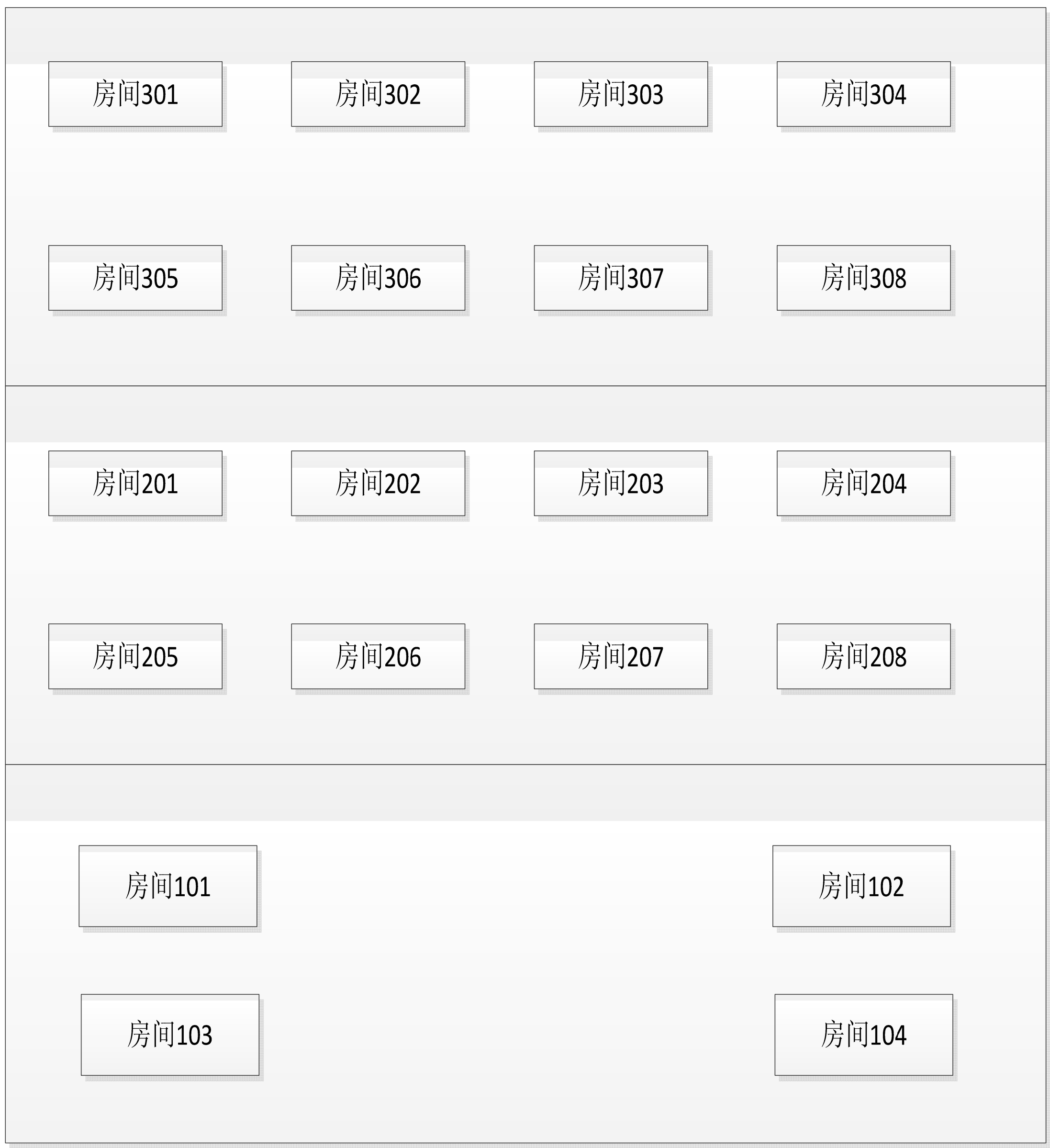
$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \qquad \text{③式}$$

③式是一个齐次方程组，由于系数行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$，根据第 1 章的房间 102 可知，此齐次方程组只有唯一零解，即$k_1=k_2=k_3=0$。这说明只有当$k_1=k_2=k_3=0$时，①式才能成立。所以，$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$是线性无关的。

这道题使用的是房间 308 中的方法 2 来做的，而且还比较简单。简单之处在于：这道题仅仅用到了线性相/无关的定义式，没有像上道题一样既用到了定义式又用到了左右乘和代入法。

3.17　小　结

线性代数大楼的第三层盖完了。现在我们的楼已经盖完一半了。请看：



在这一章中，我首先介绍了向量的基本概念、线性表出的概念、线性相/无关的概念。然后在此基础上讲了最大无关组的概念，告诉了大家最大无关组中包含的向量个数就是向量组的秩，并且向量组的秩可以利用矩阵的秩来计算。最后讲了线性表出的推广以及等价向量组的概念。以上这些都是本章的“砖”。

在本章的“房间”部分，我首先介绍了关于线性相/无关的结论以及方程组的解法。接着介绍了非常重要的五个定理，并且告诉了大家线性表出的实质就是解方程组。然后介绍了初等行变换前后列向量之间的关系以及关于矩阵的秩的一些公式。最后，我给大家讲解了关于正交的一些知识，并且为大家总结了证明线性相/无关的两种方法。

提醒一下大家，本章所讲的“向量组的秩”为线性代数学科核心中的核心，不但可以用它推出线性相/无关以及方程组解的类型（房间 303 中的定理 3），又由于它在数值上等于矩阵的秩，所以如果矩阵为方阵的话，则向量组的秩又可以和第 2 章房间 201 的大总结相联系，从而推出一堆东西。

3.18 练 习 题

1.选择题

（1）设向量组$I:\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_s$，向量组$II:\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_s,\cdots,\vec{a}_{s+r}$，则必有________。

（A）I相关$\Rightarrow II$相关　　（B）I无关$\Rightarrow II$无关

（C）II相关$\Rightarrow I$相关　　（D）II相关$\Rightarrow I$无关

解：此题给了两个向量组，向量组 I 中共含有 s 个向量，向量组 II 中共含有 s＋r 个向量，而且向量组 I 中的 s 个向量在向量组 II 中都有。换句话说，向量组 II 是在向量组 I 中的 s 个向量的基础上，又增加了 r 个向量。

根据房间 303 的定理 3 的第一个推论，立刻可以得出：I 相关$\Rightarrow$II 相关；II 无关$\Rightarrow$I 无关。观察（A）（B）（C）（D）四个选项，只要（A）选项与我们刚刚得出的结论一致。所以此题选择（A）选项。

答案：（A）。

（2）若向量组$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$线性无关，$\vec{a},\vec{b},\vec{d}$线性相关，则________。

（A）$\vec{a}$必可由$\vec{b},\vec{c},\vec{d}$线性表出　　（B）$\vec{b}$必不能由$\vec{a},\vec{c},\vec{d}$线性表出

（C）$\vec{d}$ 必可由 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性表出　　　　（D）$\vec{d}$ 必不能由 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性表出

解：题目中说 $\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ 线性相关，根据房间 303 的定理 3 的第一个推论（少相则多相，多无则少无），可以知道 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 是线性相关的。

由于 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性无关（这是题中所给的已知条件），而 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 线性相关（刚刚证明的），根据房间 303 的定理 4，立刻可以得到：$\vec{d}$ 可以由 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 线性表出。所以（C）选项为正确选项。

答案：（C）。

2.填空题

（1）设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三列维向量 $\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知 $A\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 线性相关，则 a =_____ 。

解：计算一下 $A\vec{a}$。

$$A\vec{a}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}$$

由于 $A\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 线性相关，所以 $A\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 这两个向量中要么包含零向量，要么这两个向量相等，要么这两个向量成比例（**这个结论如果以前不知道的话，现在就记下来吧：如果两个向量线性相关，那么这两个向量中要么包含零向量，要么这两个向量相等，要么这两个向量成比例**）。因为 $A\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}$，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，所以 $A\vec{a}$ 和 $\vec{a}$ 都不可能是零向量。所以这两个向量要么相等要么成比例。由于这两个向量的第一行都是 a，所以这两个向量相等。

即 $\begin{pmatrix} a \\ 2a+3 \\ 3a+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$。2 a +3＝1，解得 a ＝－1。

（2）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，$r(AB)=2$，则 a =______。

解：由于 B 是三行三列的矩阵，行数等于列数，所以矩阵 B 有对应的行列式 $|B|$。通过计算发现 B 的行列式 $|B|\neq 0$。根据第 2 章房间 201 的大总结，立刻可以知道 B 为可逆矩阵。根据第 2 章的第 2.10.1 节，B 可以写为若干初等矩阵的乘积，所以 AB=$AP_1P_2\cdots P_n$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为初等矩阵。根据第 2 章的第 2.10.2 节可以知道，$AP_1P_2\cdots P_n$ 相当于给矩阵 A 进行了若干次初等列变换。根据第 2 章的第 2.10.3 节中讲的初等变换与矩阵的秩的关系，可得 r($AP_1P_2\cdots P_n$)＝r（ A ），而刚才我已经说了，$AP_1P_2\cdots P_n = AB$，所以 r（ AB ）＝r(B)。题目中说了 r(AB)＝2，所以 r(A)＝2。所以现在我们根据 r(A)＝2 就可以求出 a。

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，化阶梯形需要四步。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & a & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & a-4 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & a-4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -15+3a \end{pmatrix}$$

由于 r(A)＝2，所以－15＋3 a ＝0，解得 a ＝5。

（3）设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{pmatrix}$ 是正交阵，则 a,b,c,d 应满足关系______。

解：根据第 3.15.3 节所讲的正交矩阵的充分必要条件可知，正交矩阵肯定会同时满足两个条件。一是任意挑出两行或任意挑出两列都是正交的，二是矩阵中的任意一个行向量或列向量都是单位向量。

在这道题中，无论 a,b,c,d 之间是什么关系，第一个条件肯定是满足的（比如挑出的是第二行和第四行，由于 $bd+(-a)(-c)+(-d)b+c(-a)=0$，所以第二行和第四行是正交的。任意选出其他两行或两列也是如此），所以此题只需要关注第二个条件即可。此题中，任意一个行向量或列向量的模都为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ （比如第三行的模为：

$\sqrt{c^2+d^2+(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{c^2+d^2+a^2+b^2}$ ）。

所以此题答案为 $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=1$ 。

（4）设 R^3 中的两组基为：$\vec{a}_1=(1,2,1)^T$、$\vec{a}_2=(2、-1,2)^T$、$\vec{a}_3=(5,1,6)^T$，$\vec{b}_1=(0,-1,-1)^T$、$\vec{b}_2=(8、-2、10)^T$、$\vec{b}_3=(-4,-6,-7)^T$，则由 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 到 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$、$\vec{b}_3$ 的过渡矩阵是 ______。

解：设由 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 到 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$、$\vec{b}_3$ 的过渡矩阵为矩阵 C。根据第 3.15.2 节，有：

$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)C$。

$$\begin{pmatrix}0 & 8 & -4\\ -1 & -2 & -6\\ -1 & 10 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}C \qquad ①式$$

计算一下矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 6\end{pmatrix}$ 对应的行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 6\end{vmatrix}$ 。

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 6\end{vmatrix}=-6+2+20-(-5)-2-24=-5\neq 0$$

由于矩阵$\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{pmatrix}$所对应的行列式$\begin{vmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{vmatrix}$不等于零，根据第 2 章房间 201 的大总结，立刻可以知道矩阵$\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{pmatrix}$为可逆矩阵，即$\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{pmatrix}^{-1}$存在。

在①式的等式两侧同时左乘$\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{pmatrix}^{-1}$，得：

$$\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&8&-4\\-1&-2&-6\\-1&10&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{pmatrix}C \qquad ②式$$

由于$AA^{-1}=A^{-1}A=E$，所以②式可化简为：$\begin{pmatrix}1&2&5\\2&-1&1\\1&2&6\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&8&-4\\-1&-2&-6\\-1&10&-7\end{pmatrix}=C$

通过计算得：$C=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&0&5\\-1&2&-3\end{pmatrix}$。

3.计算和证明题

（1）用施密特正交法将下列向量组化成标准正交向量组：

$\vec{a}_1=(1,-1,1)^T,\vec{a}_2=(-1,1,1)^T,\vec{a}_3=(1,1,-1)^T$

解：请同学们仔细看一下这道题，这道题的问题是“化成标准正交向量组”而不是“化为正交向量组”。这就意味着：在利用施密特正交法将$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$化为正交向量组之后，还需要将得到的三个向量化为单位向量。

所以大家一定要看清问题，如果问题问的是“化为正交向量组”，那么只需要正交化（利用施密特正交法）即可；如果问的是“化为标准正交向量组”，则需要先正交化（利用施密特正交法），再单位化（除以模）。

此题需要先正交化，再单位化。

正交化过程如下：

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{b}_2 &= \vec{a}_2 - \frac{(\vec{a}_2, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \times \vec{b}_1 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{b}_3 &= \vec{a}_3 - \frac{(\vec{a}_3, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \cdot \vec{b}_1 - \frac{(\vec{a}_3, \vec{b}_2)}{(\vec{b}_2, \vec{b}_2)} \cdot \vec{b}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ 即为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ 正交化后的向量。

单位化过程如下：

$$\vec{c_1}=\frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{c_2}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{c_3}=\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{c_1},\vec{c_2},\vec{c_3}$ 即为 $\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{b_3}$ 单位化后的向量，也就是最后答案。

（2）已知向量组 $I:\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$，向量组 $II:\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b}$，向量组 $III:\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{c}$，且它们的秩分别为 $r(I)=3$，$r(II)=3$，$r(III)=4$，证明：向量组 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{c}-\vec{b}$ 线性无关。

解：由于 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 的秩为 3，根据房间 308 的方法 1，立刻可以判断出 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 是线性无关的。

由于 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b}$ 的秩为 4，根据房间 308 的方法 1，立刻可以判断出 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b}$ 是线性相关的。

由于 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 线性无关，而多出一个向量以后的新向量组 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3},\vec{b}$ 线性相关，根据房间 303 的定理 4，立刻可得 $\vec{b}$ 可以由 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 线性表出。所以可以设：

$$\vec{b}=k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+k_3\vec{a_3} \qquad ①式$$

然后我们来看此题的问题，此题的问题是让证明线性无关。在房间 308 中，我给大家总结了证明线性相/无关的两种方法。此题采用房间 308 中的方法 2：反证法。假设问题的

否定成立，即假设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{c}-\vec{b}$ 是线性相关的。

由于 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性无关，而 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{c}-\vec{b}$ 线性相关，根据房间 303 的定理 4，立刻可得 $\vec{c}-\vec{b}$ 可以由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表出。所以可以设：

$$\vec{c}-\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3 \qquad ②式$$

将①式代入②式得：

$$\vec{c}-(k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+k_3\vec{a}_3)=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3$$

整理得：

$$\vec{c}=(k_1+\lambda_1)\vec{a}_1+(k_2+\lambda_2)\vec{a}_2+(k_3+\lambda_3)\vec{a}_3$$

这个式子说明 $\vec{c}$ 可以由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 线性表出。

根据房间 303 的定理 1 的①（在 n 个向量组成的向量组中，只要其中有一个向量可以被其余 n-1 个向量线性表出，就说明这 n 个向量是线性相关的）可知，$\vec{c},\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 这四个向量是线性相关的。根据房间 308 的方法 1，向量组 $\vec{c},\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的秩是小于 4 的，这与已知条件 $r(III)=4$ 矛盾。所以原假设不成立，所以向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{c}-\vec{b}$ 是线性无关的。

这道题就做完了，有的同学问我这样的问题："您不是说此题用的是房间 308 的方法 2 嘛"，可是方法 2 说的是"用线性相/无关的定义式，再结合左右乘、代入法、反证法来证明线性相/无关。您根本没用定义式而是单独用的反证法啊。"我的回答是：的确可以单独使用反证法来证明线性相/无关。

3.19　结 尾 语

我以前教过的一个学生他很喜欢数学，于是他就用了两个月的时间专门复习数学，其他科目完全不看。两个月后他觉得数学复习得很好了，于是把所有关于数学的书全收起来了，开始在桌子上摆上各种跟英语有关的书，完全不看数学了，结果后来数学又全忘了，

又开始重新全面复习数学。我记得他是提前一年半开始准备考研的，结果到了考研前一周，仍然焦头烂额，最后考得也不算太好。

我建议大家各科交替着进行复习，效果会比复习完一科再复习另一科好得多。

第 4 章　第四层——解线性方程组



由于前三层的砖运得太多了，多到已经足够盖这第四层楼了。所以，这第四层的砖就不用运了，直接盖房间就可以。

4.1 房间 401——求两个方程组的公共解

在第 3 章中，我们已经了解了如何求解齐次方程组和非齐次方程组。这一节我要告诉大家的是如何求两个方程组的公共解。**其实很简单，只要将这两个方程组联立即可。**

考研题 4.1 设线性方程组（I）$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ （II）$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

（1）分别求方程组（I）、（II）的通解。

（2）求方程组（I）、（II）的公共解。

解：这道题有两问。第一问不属于这一节的知识点，也就是说，第一问完全可以用第 3 章讲的方法求解，而第二问属于这一节的新知识点。

第（1）问：

我们先来求一下方程组（I）的通解。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

（1）将此方程组写为矩阵的形式并求秩。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}，r(A) = 2$$

（2）判断解的类型。

由于 $2 < 4$ ，即 $r < n$ ，所以该齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

将 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 化为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$

由于 $n - r = 2$ ，说明四个未知数中有两个可以自由取值并且取两组：

第一组：$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，解得：$x_1 = 0，x_4 = 0$ 。

第二组：$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，解得：$x_1=-1$，$x_4=1$。

所以基础解系为：$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 C_1、C_2 为任意常数。

我们再来求一下方程组（II）的通解。

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$$

（1）将此方程组写为矩阵的形式并求秩。

$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$、$r(B)=2$

（2）判断解的类型。

由于 $2<4$，即 $r<n$，所以该齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

将 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 化为 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$

由于 $n-r=2$，说明四个未知数中有两个可以自由取值并且取两组：

第一组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，解得：$x_1=0$、$x_2=1$。

第二组：$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，解得：$x_1=-1$、$x_2=-1$。

所以基础解系为：$\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$。

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 C_1,C_2 为任意常数。

第（2）问：

这一问是本节的新知识点，我在前面已经讲过了，只需将这两个方程组联立即可。

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\\x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

（1）将此方程组写为矩阵的形式并求秩。

$$C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

按照求秩的步骤（先化为阶梯形，再数非零行的个数）来求秩吧。

第（1）问中我之所以可以直接得出秩，是因为第（1）问中的那两个矩阵本身已经是阶梯形矩阵了，只要数非零行的个数就可以了：因为第（1）问中的两个矩阵都是两行四列的，$2<4$，$2(2-1)=2$，所以化阶梯形需要两步。第一步是将第一行第一列的数化为 1，第二步是将第一行第一列的数正下方的数都化为 0，而第（1）问中的两个矩阵第一行第一列的数本来就是 1，其正下方的数本来就都是 0，所以本来就已经是阶梯形矩阵。

这第（2）问则不同，所以只能老老实实的一步一步的化阶梯形了，$2(4-1)=6$，说明此矩阵化阶梯形需要六步。

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\1&-1&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&-2&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(C)=3$

（2）判断解的类型。

由于$3<4$，$r<n$，所以该齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

将$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$化为$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\\x_3-2x_4=0\end{cases}$

由于$n-r=1$，说明四个未知数中有一个可以自由取值并且取一组。

取$x_2=1$，解得：$x_1=-1$，$x_3=2$，$x_4=1$

所以基础解系为：$\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$。

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$，其中$C$为任意常数。

我们再来看一道类似的题目。

考研题 4.2　求线性方程组

$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3+3x_4=11\\-3x_1+x_2-4x_3-2x_4=-6\\-x_1-9x_2+3x_4=15\end{cases}$满足条件$x_1=x_2$的全部解。

解：此题虽然没有明显写出“公共解”这三个字，但我们非常容易地就可以判断出这

道题求的就是$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3+3x_4=11 \\ -3x_1+x_2-4x_3-2x_4=-6 \\ -x_1-9x_2+3x_4=15 \end{cases}$与$x_1-x_2=0$的公共解。

所以这道题与上一道题一样，属于“公共解”问题，联立即可。也就是说，求非齐次方程组$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3+3x_4=11 \\ -3x_1+x_2-4x_3-2x_4=-6 \\ -x_1-9x_2+3x_4=15 \\ x_1-x_2=0 \end{cases}$的通解就行了。

就按照第 3 章房间 302 所讲的方法去求解就可以了。在此我只给出最后答案：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \text{(唯一解)}$$

4.2　房间 402——同解方程组的证明

本节要讨论的问题是“同解方程组”。“同解方程组”与上一节所讨论的问题“两个方程组的公共解”有共同点也有不同点。

共同点在于：都涉及到了两个方程组。

不同点在于：所谓两个方程组的公共解，指的是第一个方程组的解与第二个方程组的解的交集部分。如果用集合 **A** 代表第一个方程组的解，用集合 **B** 代表第二个方程组的解，求两个方程组的公共解则可以表示为求$A \cap B$，即求集合 **A** 与 **B** 的交集；而同解方程组，指的是第一个方程组的解与第二个方程组的解是一样的。如果用集合 **A** 代表第一个方程组的解，用集合 **B** 代表第二个方程组的解，证明两个方程组是同解方程组则可以表示为证明 **A=B**。

了解了“同解方程组”与“两个方程组的公共解”的相同点与不同点之后，我们正式来看同解方程组。

两个方程组为同解方程组的大前提是这两个方程组的未知数个数必须相同，如果两个方程组连未知数个数都不相同的话（比如方程组 **I** 中的未知数是x_1、x_2、x_3，方程组 **II**

中的未知数是 x_1、x_2、x_3、x_4），那么这两个方程组说啥也不可能是同解方程组！当然，出题人也绝对不会出两个未知数个数不同的方程组，让你证明它们是同解方程组。如果有出题人这么出题了，那他第二天肯定下岗！

好了，言归正传，同解方程组一定是出成证明题的形式的。也就是说，与同解方程组有关的题的出题形式肯定是让证明两个方程组为同解方程组。那么这样的证明题我们应该如何去做呢？就只有两种方法。

4.2.1　方法 1

互推法。

考研题 4.3　证明：方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 和方程组 $A^TA\vec{X}=\vec{0}$ 是同解方程组。

解：这道题我们就采用互推法来做。即：先从 $A\vec{X}=\vec{0}$ 推 $A^TA\vec{X}=\vec{0}$，再从 $A^TA\vec{X}=\vec{0}$ 推 $A\vec{X}=\vec{0}$。

我们先来从 $A\vec{X}=\vec{0}$ 推 $A^TA\vec{X}=\vec{0}$。

将 $A\vec{X}=\vec{0}$ 等式两边左乘 A^T，得：$A^TA\vec{X}=A^T\vec{0}=\vec{0}$（任何矩阵乘以零向量都等于零向量)。

我们再来从 $A^TA\vec{X}=\vec{0}$ **推** $A\vec{X}=\vec{0}$。

将 $A^TA\vec{X}=\vec{0}$ 等式两侧左乘 $\vec{X}^T$，得：

$\vec{X}^TA^TA\vec{X}=\vec{X}^T\vec{0}=0$　　　　①式

注意：①式右侧是数 0 而不是零向量，因为 $\vec{X}^T$ 是行向量，$\vec{0}$ 是列向量，早在第 2 章的房间 202 中我就给大家总结过，一个行向量乘以一个列向量等于一个数。

根据第 2 章房间 205 所讲的关于矩阵的转置的四个公式中的公式 3：$(AB)^T=B^TA^T$，①式的等式左侧可以变为 $(A\vec{X})^TA\vec{X}$。所以①式可以变为：

$(A\vec{X})^T A\vec{X}=0$　　②式

②式的等式左侧是三个矩阵相乘的形式。这三个矩阵分别是：$(A\vec{X})^T$，A，$\vec{X}$。根据第 2 章房间 203 所讲，矩阵乘法具有结合律（意思是可以任意加括号），所以②式左侧可以变为$(A\vec{X})^T(A\vec{X})=0$。$A\vec{X}$是什么？是一个列向量（我早在第 2 章的房间 202 中就总结过，一个矩阵乘以一个列向量后的形式是列向量。所以$A\vec{X}$是一个列向量）。

设 $A\vec{X}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$

则$(A\vec{X})^T(A\vec{X})=0$可以化为：

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0$$

所以$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$。

即：$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$

即：$A\vec{X}=\vec{0}$

好了，终于大功告成了。我们由$A\vec{X}=\vec{0}$推出了$A^TA\vec{X}=\vec{0}$，又由$A^TA\vec{X}=\vec{0}$推出了$A\vec{X}=\vec{0}$。所以方程组$A\vec{X}=\vec{0}$与方程组$A^TA\vec{X}=\vec{0}$为同解方程组。

4.2.2　方法 2

只从一侧推另一侧，并且证明 $n-r$ 相等。

通过以上的考研题，我想大家对于证明两个方程组为同解方程组的方法 1 已经掌握了，现在我给大家介绍方法 2。**方法 2 是“只从一侧推另一侧，并且证明 $n-r$ 相等。”**

方法 2 是什么意思呢？听我解释。方法 1 是互推，也就是互相推。而方法 2 不用“互相”，只用从一侧推另一侧，等于说方法 2 比方法 1 少了“反推”，但方法 2 比方法 1 多了一个条件，那就是证明 $n-r$ 相等。其实只要证明 r 相等就够了，因为 n 代表未知数的个数，既然出题人让你证明两个方程组为同解方程组，那么这两个方程组的未知数个数 n 就一定是相等的。但是尽管如此，方法 2 我仍然说的是“ $n-r$ ”而没有说“r”，这是为什么呢？因为 $n-r$ 相等说明两个方程组的基础解系中所含的向量个数相等，这是方法 2 的本质。

考研题 4.4 证明：若方程组：

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = b_m \end{cases}$$

有解，则方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$$

和方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 0 \end{cases}$$

是同解方程组。

解：这题虽然很长，但其实很简单。长是因为方程组占地儿，以后同学们越是碰见这种长的题，越不用害怕。

好，为了接下来方便讲解，我们来做如下工作。

记方程组$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = b_m \end{cases}$ 为方程组（1）。

记方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \end{cases}$ 为方程组（2）。

记方程组$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 0 \end{cases}$ 为方程组（3）。

记矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，向量 $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，向量 $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$，向量 $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$。

则方程组（1）可以表示为 $A\vec{Y} = \vec{b}$，方程组（2）可以表示为 $A^T\vec{X} = \vec{0}$，方程组（3）可以表示为$\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}\vec{X} = \vec{0}$。

则这道题的已知条件和问题可以表示为：已知方程组（1）$A\vec{Y} = \vec{b}$ 有解，证明方程组（2）$A^T\vec{X} = \vec{0}$ 和方程组（3）$\begin{pmatrix} A^T \\ b^T \end{pmatrix}\vec{X} = \vec{0}$ 是同解方程组。

此题我们采用方法 2 来做。方法 2 是：只从一侧推另一侧，并且证明 $n-r$ 相等。

“只从一侧推另一侧”证明如下。

由于方程组（3）是在方程组（2）的基础上多了一个方程，所以方程组（3）的解显然必满足方程组（2）。证明完毕。

“证明 $n-r$ 相等”证明如下。

要证明的是方程组（2）$A^T\vec{X}=\vec{0}$ 和方程组（3）$\begin{pmatrix}A^T\\b^T\end{pmatrix}\vec{X}=\vec{0}$ 的 $n-r$ 相等。n 肯定相等，这毫无疑问，因为 n 指的是未知数个数，所以只需证明矩阵 A^T 的秩与矩阵 $\begin{pmatrix}A^T\\b^T\end{pmatrix}$ 的秩相等即可。我们现在来看方程组（1）$A\vec{Y}=\vec{b}$，题中已知方程组（1）$A\vec{Y}=\vec{b}$ **有解**，根据第 3 章房间 302 中所讲的非齐次方程组的解法中的第二步（判断非齐次方程组解的类型）可知，$r(A)=r(A\,|\,\vec{b})$。根据第 3 章房间 306（关于矩阵的秩的一些公式）中的公式 2（一个矩阵的秩与该矩阵转置后所得到的矩阵的秩相等）可知，$r(A)=r(A^T)$，$r(A\,|\,\vec{b})=r\begin{pmatrix}A^T\\b^T\end{pmatrix}$。所以 $r(A^T)=r\begin{pmatrix}A^T\\b^T\end{pmatrix}$。

综上所述，方程组（2）与方程组（3）是同解方程组。

4.3　房间 403——已知齐次方程组的基础解系，反求齐次方程组

以前的考研题目中曾出现过这种题：已知齐次方程组的基础解系，反求齐次方程组。

现在我给出这种题的解题方法：**用题目中所给的基础解系来构造一个方程组，然后求此方程组的基础解系，最后用求得的基础解系构造方程组，此方程组即为所求方程组。**此方法在这里不做证明，大家记住就可以了。

考研题 4.5　已知两个方程四个未知数的齐次线性方程组的通解为 $\vec{X}=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$，求原方程组。

解：此题属于“已知齐次方程组的基础解系，反求齐次方程组”的题，所以此题用我刚讲的方法去做就可以了。

由题意可知，$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$是原方程组的一个基础解系，利用此基础解系构造方程组为：

$$\begin{cases}y_1+2y_3+3y_4=0\\y_2-y_3+y_4=0\end{cases}$$

下面我们来解此齐次方程组。

（1）将此齐次方程组化为矩阵的形式并求秩。

$A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$，$r(A)=2$

（2）判断解的类型。

由于$2<4$，即$r<n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

$4-2=2$，说明四个未知数中有两个未知数可以自由取值且取两组。

将$A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$化为$\begin{cases}y_1+2y_3+3y_4=0\\y_2-y_3+y_4=0\end{cases}$

第一组：$\begin{pmatrix}y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，解得：$y_1=-2$，$y_2=1$。

第二组：$\begin{pmatrix}y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，解得：$y_1=-3$，$y_2=-1$。

所以基础解系为：$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

所以原方程组为：$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$。

注意：本题答案不唯一，因为：让 k_1、k_2 取其他的值的话还可以得到其他基础解系；而且自由未知量也不一定选取 y_3、y_4，另外 y_3、y_4 也不一定取1、0 和 0、1 。

4.4　房间 404——线性方程组解的性质

线性方程组解的性质就五句话。

第一句话：若 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_{n-r}$ 是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的 $n-r$ 个线性无关的解，则 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\vec{\alpha}_{n-r}$ 为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解（其中 n 为未知数的个数，r 为矩阵 A 的秩，为 $k_1,k_2,\cdots k_{n-r}$ 任意常数）。

解释：这第一句话大家应该再熟悉不过了，因为我们之前一直是这么求齐次方程组的通解的。这早在第 3 章的房间 302 就已经讲过了，而且我们还给这 $n-r$ 个线性无关的解所组成的向量组起了个名字叫基础解系。

第二句话：设 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\vec{\alpha}_{n-r}$ 为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解，$\vec{c}$ 为非齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的一个解，则 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_{n-r}\vec{\alpha}_{n-r}+\vec{c}$ 为非齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的通解（其中 n 为未知数的个数，r 为矩阵 A 的秩，$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数）。

解释：这第二句话大家应该和第一句话一样熟悉，因为我们之前一直是这么求非齐次方程组的通解的。这早在第 3 章的房间 302 就已经讲过了。

第三句话：若 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\cdots,\vec{\alpha}_s$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，则 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_s\vec{\alpha}_s$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解（其中 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为任意常数）。

解释：这第三句话是从前没有讲过的新知识点。同学们要想理解这第三句话，最好的方法就是将这第三句话和前面的第一句话对比着一起看。第一句话和第三句话都是只涉及齐次方程组而不涉及非齐次方程组。那么它们的区别是什么呢？首先看一下条件的区别：第一句话的条件中要求了“线性无关”和“n-r 个”，而第三句话的条件中则没有这两个要求，再看一下结论的区别：第一句话的结论中说的是“通解”，而第三句话的结论中只是说“解”。

第四句话：若$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$是非齐次方程组$A\vec{X}=\vec{b}$的两个解，则$\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$一定是齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的解。

解释：这第四句话也是新知识点，它告诉了大家：非齐次方程组的两个解之差是这个非齐次方程组所对应的齐次方程组的解。

第五句话：若$\vec{\alpha}$是齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的一个解，$\vec{c}$是非齐次方程组$A\vec{X}=\vec{b}$的一个解，则$k\vec{\alpha}+\vec{c}$一定是非齐次方程组的一个解，即$A(k\vec{\alpha}+\vec{c})=\vec{b}$。

解释：这第五句话也是新知识点，它告诉了大家：一个非齐次方程组所对应的齐次方程组的任意一个解向量乘以任意常数k之后，再加上该非齐次方程组的一个解，所得到的结果一定是该非齐次方程组的一个解。

考研题 4.6 设A是秩为$n-1$的n阶矩阵，$\vec{\alpha}_1$与$\vec{\alpha}_2$是方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的两个不同的解向量，则$A\vec{X}=\vec{0}$的通解必定是_________。

（A）$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$　　（B）$k\vec{\alpha}_1$　　（C）$k(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)$　　（D）$k(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$

解：$A\vec{X}=\vec{0}$是一个齐次方程组。由于题目中说$r(A)=n-1$，所以$n-r=n-(n-1)=1$，说明$A\vec{X}=\vec{0}$的基础解系中只含一个向量。有的同学做到这儿，直接把选项（A）、（C）、（D）都排除了，这是完全错误的。比如设$\vec{\alpha}_3=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$，那么（C）选项就变为了$k\vec{\alpha}_3$，这不就是一个向量嘛，所以不能把（A）、（C）、（D）都排除了。但是（A）选项却是可以刚读完题就排除的，因为题目的问题是“通解”，肯定要乘以任意常数k，所以（A）选项可以首先排除。我们从（B），（C），（D）中选择答案。

（B）选项错误。因为如果$\vec{\alpha}_1$是零向量的话，则$\vec{\alpha}_1$不能作为基础解系（单个零向量是线性相关的而不是线性无关的）。

（C）选项错误。因为当$\vec{\alpha}_1=-\vec{\alpha}_2$时，$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=\vec{0}$，即$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$是零向量。

（D）选项正确。因为题目中说了，$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$不同，所以$\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$不可能是零向量，而

单个非零向量是线性无关的。又因为 $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 可以看成是 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2$，其中 $k_1=1$、$k_2=-1$。由本节的“第三句话”可知，$\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，所以 $\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 可以作为齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，所以齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解可以表示为 $k(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$。

考研题 4.7　已知 $\vec{\beta}_1$、$\vec{\beta}_2$ 是 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的两个不同的解，$\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，k_1、k_2 是任意常数，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的通解是________。

（A）$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2}{2}$　　（B）$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$

（C）$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2}{2}$　　（D）$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$

解：由于 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，所以 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中含有两个向量。由本节的“第三句话”可知，$\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 也是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解。

$$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

由于 $\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}=-1\neq0$，所以 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 为可逆矩阵，所以 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 可以写为若干初等矩阵的乘积，即 $(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)P_1P_2\cdots P_n$，其中 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为初等矩阵。而 $(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)P_1P_2\cdots P_n$ 相当于给矩阵 $(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)$ 进行了若干次初等列变换，又因为初等变换不改变矩阵的秩，所以 $r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)=r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)$。由于 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，所以 $\vec{\alpha}_1$、$\vec{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2)=2$，所以 $r(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)=2$，所以 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 线性无关。所以 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$ 可以作为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，所以 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解为 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$。

而 $A\times\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}=\dfrac{1}{2}A(\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2)$，由于矩阵乘法对于矩阵加减法满足分配律，所以 $\dfrac{1}{2}A(\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2)=\dfrac{1}{2}(A\vec{\beta}_1+A\vec{\beta}_2)$。

由于题中说 $\vec{\beta}_1$、$\vec{\beta}_2$ 是 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的解，所以有 $A\vec{\beta}_1=\vec{b}$、$A\vec{\beta}_2=\vec{b}$，所以 $\dfrac{1}{2}(A\vec{\beta}_1+A\vec{\beta}_2)=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{b})=\dfrac{1}{2}(2\vec{b})=\vec{b}$，即 $A\times\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}=\vec{b}$，所以 $\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$ 为 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的一个特解。

由于 $k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)$ 为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解，$\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$ 为 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的特解，由本节的"第二句话"（或由房间 302）可知，$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2)+\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$ 为 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的通解。此题答案为（B）选项。

（D）选项错误的原因在于：根据本节的"第四句话"，$\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$ 的确是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，但是 $\vec{\alpha}_1$ 与 $\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$ 到底是不是线性无关的就说不定了。既然说不定，那么就不能把 $\vec{\alpha}_1$，$\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$ 作为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系。而（A）、（C）两个选项中出现的 $\dfrac{\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2}{2}$ 根本不是 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的解，因为 $A\times\dfrac{\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2}{2}=\dfrac{1}{2}(A\vec{\beta}_1-A\vec{\beta}_2)=\dfrac{1}{2}(\vec{b}-\vec{b})=\vec{0}\neq\vec{b}$，所以（A）、（C）两个选项均不能选。

答案：（B）。

考研题 4.8 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$，若 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4$ 是非齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的互不相等的解，则对应齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系________。

（A）不存在　　　　　　　　　　　　（B）仅含一个非零解向量

（C）含有两个线性无关的解向量　　（D）含有三个线性无关的解向量

解：A^* 的概念大家可别忘了，这是很早以前讲的。A^* 称为矩阵 A 的伴随矩阵，A^* 是矩阵 A 中所有元素的代数余子式所组成的矩阵。**现在我要告诉大家一个我之前没有讲过但是却很容易推导出来的知识点：方阵 A 中某元素的代数余子式必定是方阵 A 的一个 $n-1$ 阶子式。**这很好推导，因为方阵中的一个元素的代数余子式就是方阵去掉该元素所在行和所在列后剩下的矩阵所对应的行列式，而方阵的 $n-1$ 阶子式的定义也是这个，明白了吧。

而此题说 $A^* \neq O$，这就意味着矩阵 A^* 的 n^2 个数中至少有一个不为零，也就是说方阵 A 的 n^2 个元素中至少有一个元素的代数余子式不为零。我们知道，矩阵秩的定义是：若存在 r 阶子式不为零，而 $r+1$ 阶子式都为零，则矩阵的秩为 r。所以此题立刻可以得出这样的结论：矩阵 A 的秩为 $n-1$ 或 n。

而且我建议同学们，干脆直接把这句话背下来：若 n 阶方阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq O$，则 A 的秩为 n-1 或 n。

那么在此题中，矩阵 A 的秩到底是 $n-1$ 还是 n 呢？题中说 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有四个不同的解，根据第 3 章房间 302 中的非齐次方程组的解法的第二步（判断解的类型），可以知道非齐次方程组解的类型只有三种：无解、唯一解、无穷多解。而此题说该非齐次方程组有四个不同的解，则显然该非齐次方程组有无穷多解，也就是 $r_1 = r_2 < n$，所以立刻可以知道矩阵 A 的秩为 $n-1$ 而不是 n。

因为齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的未知数个数为 n，$r(A)=n-1$，所以齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中所含向量的个数为 $n-r(A)=n-(n-1)=1$。此题应选择（B）选项。

答案：（B）。

考研题 4.9　对于 n 元方程组，下列命题正确的是________。

（A）如果 $A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解

（B）如果 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解

（C）如果 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有两个不同的解，则 $A\vec{X}=\vec{0}$ 有无穷多解

（D）$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(A)=n$

解：（A）选项：此选项说的是如果齐次方程组只有零解，则对应的非齐次方程组有唯

一解，我们来看一下对不对。根据房间 302，$A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解，意味着 $r(A)=n$；$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解，意味着 $r(A)=r(A|\vec{b})=n$。所以此选项是不对的，因为 $r(A)=n$ 推不出 $r(A)=r(A|\vec{b})=n$，当 $r(A)\neq r(A|\vec{b})$ 时，$A\vec{X}=\vec{b}$ 是无解的。

（B）选项：根据房间 302，$A\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解，意味着 $r(A)<n$；$A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解，意味着 $r(A)=r(A|\vec{b})<n$。所以此选项是不对的，因为 $r(A)<n$ 推不出 $r(A)=r(A|\vec{b})<n$，当 $r(A)\neq r(A|\vec{b})$ 时，$A\vec{X}=\vec{b}$ 是无解的。

（C）选项：$A\vec{X}=\vec{b}$ 有两个不同的解意味着 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解。根据房间 302，$A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解意味着 $r(A)=r(A|\vec{b})<n$；$A\vec{X}=\vec{0}$ 有无穷多解意味着 $r(A)<n$。所以此选项是正确的，因为 $r(A)=r(A|\vec{b})<n$ 可以推出 $r(A)<n$。

（D）选项：根据房间 302 可知，$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(A)=r(A|\vec{b})=n$ 而不是 $r(A)<n$，所以此选项错误。

答案：（C）。

4.5　房间 405——通过讨论方程组中参数的取值，判断解的类型

在第 3 章的房间 302 中，我给出了求解齐次方程组和求解非齐次方程组的步骤。无论是求解齐次方程组还是求解非齐次方程组都是三个步骤，第一步是将所给方程组化为矩阵的形式并且求秩，第二步是判断解的类型，第三步是求解。

这些大家早就知道了，我之所以写在这里是为了强调三个步骤中的第一步，**即：将所给方程组化为矩阵的形式并且求秩。**

“将所给方程组化为矩阵的形式”这很简单，一个一个数照着写就可以了。而“求秩”可就要好好研究研究了。同学们，看到这里你们是否会想：求秩我早就会了啊，就是先化阶梯形，再数非零行。化阶梯形时先判断需要几步，然后奇数步化 1、偶数步化 0 就可以了啊。

但是同学们，以前我们解的方程组都是不带未知参数的方程组。然而，考研数学中多次出现过带参数的方程组，有时是带一个参数，有时是带两个参数。那么，这个时候，求秩就会遇到困难。具体的说，参数会影响化阶梯形时的奇数步，对于偶数步没有影响。

同学们，我现在先将我为你们总结的解题方法写在这里，也许你们会看不懂，不过无所谓，因为我马上就会以例题来讲解。我为你们总结的万能解题方法是：

在化矩阵为阶梯形矩阵的奇数步时，如果 a_{ii}（指矩阵中第 i 行第 i 列的数）中含未知参数，那么此时我们就看其正下方的数。具体来说就是：

- **如果其正下方有非零的数，则进行换行即可。**
- **如果其正下方没有非零的数，就需要进行分类讨论：$a_{ii}=0$ 为一类，$a_{ii}\neq 0$ 为一类。**

考研题 4.10　已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

（1）a、b 为何值时，方程组无解？a、b 为何值时，方程组有解？

（2）有解时，求出方程组全部解。

解：此题是一道求解非齐次方程组的题。**这道题与以往我们做的解方程组的题的不同之处在于：这个方程组中含有两个未知参数 a、b，**但是不管是不含参数的方程组还是含参数的方程组，我们都得按照房间 302 所讲的三个步骤来做，这是毫无疑问的。

第（1）问

第一步：将所给方程组化为矩阵的形式并求两个秩。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{pmatrix}$$

这个矩阵有四行六列。$4<6$，$2(4-1)=6$，所以化阶梯形需要六小步。

化阶梯形六小步之①：将 a_{11} 化为 1。由于 a_{11} 本来就是 1，所以这一步略过。

化阶梯形六小步之②：将 a_{11} 正下方的 a_{21}、a_{31}、a_{41} 都化为 0。方法是第一行 $\times(-3)$ 加到第二行，第一行 $\times(-5)$ 加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&a\\0&1&2&2&6&3\\5&4&3&3&-1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}$$

化阶梯形六小步之③：将a_{22}化为1。方法是第二行$\times(-1)$。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-2&-6&a-3\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}$$

化阶梯形六小步之④：将a_{22}正下方的a_{32},a_{42}都化为0。方法是第二行$\times(-1)$加到第三行，第二行$\times1$加到第四行。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&1&2&2&6&3\\0&-1&-2&-2&-6&b-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3-a\\0&0&0&0&0&a\\0&0&0&0&0&b-a-2\end{pmatrix}$$

好，现在我们要进行第⑤小步了。然而我却不能写“化阶梯形六小步之⑤”，这是为什么呢？因为这一步要分类讨论，所以不能统一的写“化阶梯形六步之⑤”。

好，那么同学们不禁要问了，这一步为什么要分类讨论呢？请看我接下来的分析。

第⑤小步是将a_{33}化为1，可a_{33}是0，**由第2章第2.3.3节（利用初等行变换来求矩阵的秩）所讲的“特殊情况”可知，当奇数步（化1的步骤）出现0时，先看该数正下方有没有非零的数。若有，则将该数所在行与该数正下方的非零的数所在行互换；若没有，则改为将该数右侧的那个数化为1。**那么我们看此题，此题中a_{33}正下方的数只有一个，就是0，所以不能换行，而要关注a_{33}右侧的a_{34}。结果a_{34}也是0！嘿，这题有意思，那就再看a_{34}正下方有没有非零的数，a_{34}正下方的数只有一个，就是0，所以不能换行，而要关注a_{34}右侧的a_{35}。结果a_{35}也是0！这题真是朵奇葩！那没办法，只能再看a_{35}正下方有没有非零的数，a_{35}正下方的数只有一个，就是0，所以不能换行，而要关注a_{35}右侧的a_{36}。**瞧！这题多有意思，第⑤小步要做的事明明是把a_{33}化为1，如今却转化为了要把a_{36}化为1。**

值得注意的是，之前我所说的这一大段话完完全全的和本节所讲的解题方法无关，本节的解题方法是用于奇数步（化1的步骤）出现字母时的情况。

好，我们接着讲，这第⑤小步要做的事已经从原先的把a_{33}化为1变为了现在的把a_{36}化为1，而a_{36}是a！a是参数！**现在终于要用到本节我给大家总结的解题方法了。**

本节我给大家总结的解题方法是：**当奇数步（化 1 的步骤）出现参数时，就看其正下方的数。具体来说，如果其正下方有非零的数，则进行换行即可；如果其正下方没有非零的数，就需要进行分类讨论：**$a_{ii}=0$ **为一类，**$a_{ii}\neq 0$ **为一类。**

我们回到此题，a 的正下方是 $b-a-2$，$b-a-2$ 是不是非零的数呢？当然不是。所以此时要分类讨论，分 $a=0$ 与 $a\neq 0$ 两种情况来讨论。

下面我说两点需要注意的地方：

第一点，本节所讲的是"当奇数步出现参数时，看其正下方有没有非零的数，有就换行，没有才讨论"。

第 2 章第 2.3.3 节所讲的特殊情况是"当奇数步出现 0 时，看其正下方有没有非零的数，有的话就换行，没有的话就把该数右侧的数化 1"。

这两句话中都出现了"非零的数"，但这两个"非零的数"不是一回事。本节中所提到的"非零的数"的范围特别窄，既不能是 0 也不能含参数（也就是说，必须得是非零的纯数字）；而第 2 章第 2.3.3 节中所提到的"非零的数"范围就宽了，只要不是明显地写着"0"，就叫非零的数。

明白了吧，咱们就说此题吧，a **的正下方是** $b-a-2$**，是** $b-a-2$ **是非零的数吗？我刚才已经告诉大家了：不是。所以要讨论而不是换行。但如果** a_{36} **不是** a **而是 0，然后 0 的正下方是** $b-a-2$**，那么就属于第 2 章第 2.3.3 节所讲的特殊情况了，**$b-a-2$ **就是非零的数了，就要换行了。**

第二点，如果 a_{36} **不是** a **而是** $f(a)$**，那么分类讨论时就应该分** $f(a)=0$ **和** $f(a)\neq 0$ **两种情况。例如，如果** a_{36} **是** $a-100$**，则分类讨论时就应该分** $a-100=0$ **与** $a-100\neq 0$ **两种情况来讨论**好，两点需要注意的地方已经说完了，现在我们继续做。

当 $a=0$ **时，矩阵变为了：**

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}$$

根据第 2 章第 2.3.3 节所讲的特殊情况，当奇数步出现 0 时，看其正下方有没有非零的数，有的话就换行，没有的话就把该数右侧的数化为 1 即可。现在 a_{36} 正下方的数为 $b-2$，是非零的数，所以换行。

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&b-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&b-2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

现在又要用到本节所讲的解题方法了，因为奇数步出现了参数。由于$b-2$正下方只有一个数，是0，而不是非零的数，所以要分类讨论。分$b-2=0$和$b-2\neq 0$即$b=2$和$b\neq 2$两种情况来讨论。值得注意的是，现在我们对b进行的讨论是基于$a=0$的。

情况 1：当$a=0$且$b=2$时，矩阵变为了：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在$a=0$且$b=2$的情况下化阶梯形六小步之⑤：把a_{36}化为**1**。可是a_{36}是**0**，a_{36}的正下方也全是**0**，a_{36}右侧没数了，所以第⑤步因无法进行而结束。

在$a=0$且$b=2$的情况下化阶梯形六小步之⑥：把a_{36}的正下方的数全化为**0**，因为上一步已无法进行，所以这一步也直接结束。

$r_1=r_2=2$

情况 2：当$a=0$且$b\neq 2$时，矩阵变为了：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在$a=0$且$b\neq 2$的情况下化阶梯形六小步之⑤：把a_{36}化为**1**。方法：第三行$\times\dfrac{1}{b-2}$。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在$a=0$且$b\neq 2$的情况下化阶梯形六小步之⑥：把a_{36}正下方的数全化为 **0**，而a_{46}本来就是**0**，所以不用化了。

$r_1=2$，$r_2=3$

情况 3：当$a\neq 0$时，矩阵变为了：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-a-2 \end{pmatrix}$$

在 $a \neq 0$ 的情况下化阶梯形六小步之⑤：将 a_{36} 化为 1。方法：第三行×$\frac{1}{a}$。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-a-2 \end{pmatrix}$$

在 $a \neq 0$ 的情况下化阶梯形六小步之⑥：把 a_{46} 化为 0。方法：第三行×$(-b+a+2)$ 加到第四行。看见了吧，偶数步遇参数什么都不影响。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r_1 = 2$， $r_2 = 3$

第二步：判断解的类型。

当 $a = 0$ 且 $b = 2$ 时，由于 $r_1 = r_2 < n$，所以该方程组有无穷多解。

当 $a = 0$ 且 $b \neq 2$ 时，由于 $r_1 \neq r_2$，所以该方程组无解。

当 $a \neq 0$ 时，由于 $r_1 \neq r_2$，所以该方程组无解。

第（1）问已经做完了，虽篇幅较长，但逻辑非常清晰，完完全全就是用的第 2 章第 2.3.3 节讲的求矩阵的秩的方法，只是在进行奇数步骤时如果出现参数，则利用本节所讲的方法分类讨论而已，就这么简单。

第（2）问

现在我们来看这第（2）问，问的是：有解时，求出方程组的全部解。由此可知，此问问的是当 $a = 0$ 且 $b = 2$ 时的情况。这一问已经不涉及任何本节的新知识点了，就用第 3 章房间 302 所讲的方法去求解即可。这一问我就不给大家写答案了，因为 $a = 0$ 且 $b = 2$ 时，此题与第 3 章的考研题 3.3 是一模一样的。

4.6 房间 406——已知方程组解的类型，求方程组中的参数

同学们，如果上一个房间的解题方法你们掌握得很好的话，那本房间你们就可以不费吹灰之力的盖成。这是因为本房间所涉及的题型只是上一个房间所涉及的题型换了一种问法而已。

上个房间所涉及的题型的问法是：**“当参数为何值时，方程组无解？当参数为何值时，方程组有无穷多解？”**而本房间所涉及的题型的问法是：**“已知方程组无解，求参数？已知方程组有无穷多解，求参数？”**明白了吧，就是换了一种问法而已，本质完全没变，都是让求参数。所以本房间所涉及的题型的解题方法与上个房间所讲的解题方法完全一致。

考研题 4.11 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=1 \\ (a+2)x_1+3x_2+2x_3=3 \\ -2x_1+ax_2+x_3=0 \end{cases}$$

无解，则参数 a 应满足什么条件？

解：将所给方程组化为矩阵的形式：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ a+2 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由于此矩形有三行四列，$3<4$，$2(3-1)=4$，所以此矩阵化为阶梯形矩阵需要四步。

化阶梯形四步之①：将 a_{11} 化为 1，a_{11} 本来就是 1，所以此步骤省略。

化阶梯型四步之②：将 a_{21}，a_{31} 化为 0，方法：第一行×$(-a-2)$ 加到第二行，第一行×2 加到第三行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ a+2 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & a & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(2a+1) & -a & 1-a \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

由于 a_{22} 为 $-(2a+1)$，其正下方也没有非零的数，所以要讨论。

情况 1：当 $-(2a+1)=0$ 即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，矩阵变为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

在 $a=-\frac{1}{2}$ 的情况下化阶梯形四步之③：将 a_{22} 化为 1。方法：互换第二行和第三行，然后将新的第二行×$\frac{2}{7}$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

在 $a=-\frac{1}{2}$ 的情况下化阶梯形四步之④：将 a_{22} 正下方的数化为 0。a_{22} 正下方只有一个数，而且本身就是零，所以此步骤省略。

由于 $r_1=r_2=n=3$ 可知，该方程组有唯一解而不是无解，所以不符合题意。

情况 2：当 $-(2a+1)\neq 0$ 即 $a\neq -\frac{1}{2}$ 时，矩阵变为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(2a+1) & -a & 1-a \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

在 $a\neq -\frac{1}{2}$ 的情况下化阶梯形四步之③：将 a_{22} 化为 1。方法：第二行×$\left(-\frac{1}{2a+1}\right)$。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(2a+1) & -a & 1-a \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2a+1} & \frac{a-1}{2a+1} \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

在 $a \neq -\frac{1}{2}$ 的情况下化阶梯形四步之④：将 a_{22} 正下方的数化为 0。方法：第二行 $\times(-a-4)$ 加到第三行。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2a+1} & \frac{a-1}{2a+1} \\ 0 & a+4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2a+1} & \frac{a-1}{2a+1} \\ 0 & 0 & 3-\frac{a^2+4a}{2a+1} & 2-\frac{a^2+3a-4}{2a+1} \end{pmatrix}$$

现在我们已经把化阶梯形矩阵的四步都进行完了，题中说此方程组无解，则有如下式子成立。

设：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2a+1} \\ 0 & 0 & 3-\frac{a^2+4a}{2a+1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{a}{2a+1} & \frac{a-1}{2a+1} \\ 0 & 0 & 3-\frac{a^2+4a}{2a+1} & 2-\frac{a^2+3a-4}{2a+1} \end{pmatrix}$$

则 $r(A) \neq r(B)$。

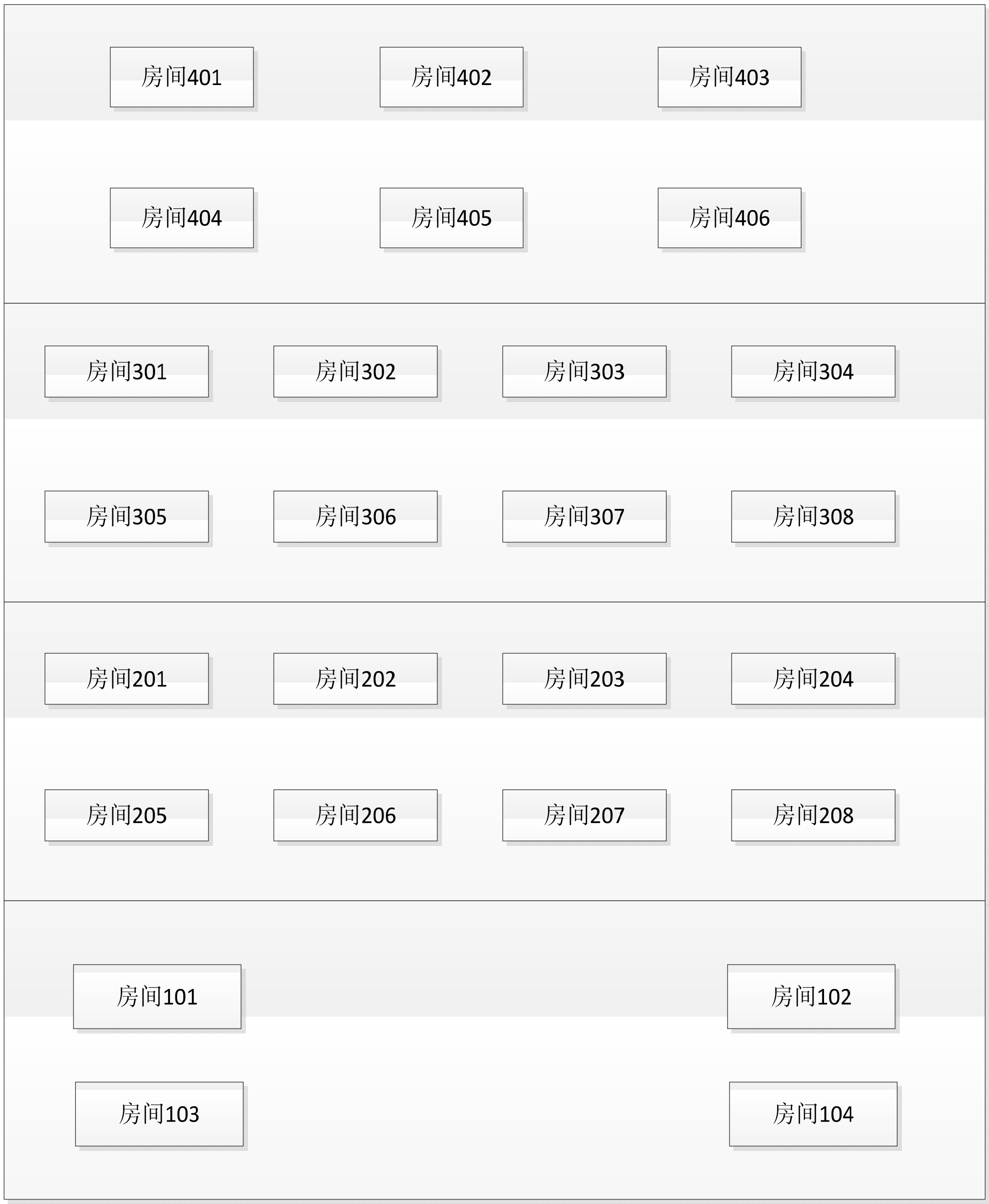
所以 $3-\frac{a^2+4a}{2a+1}=0$，解得 $a=3$ 或 $a=-1$。

$2-\frac{a^2+3a-4}{2a+1} \neq 0$，解得 $a \neq 3$ 或 $a \neq -2$。

综上：$a \neq -\frac{1}{2}$ 且 $a=-1$（为什么有 $a \neq -\frac{1}{2}$ 呢？因为我们是在 $a \neq -\frac{1}{2}$ 这个大前提下做的），而“$a \neq -\frac{1}{2}$ 且 $a=-1$”与“$a=-1$”是一样的，所以此题答案为 $a=-1$。

4.7 小　结

线性代数大楼的第四层盖完了，现在，我们已经盖完大楼的三分之二了。



本章内容不多，因为本章只有房间没有砖。

在本章中，我首先给大家介绍了两个方程组的公共解的求法以及同解方程组的证明方法，并告诉了大家公共解和同解的区别与联系。接着，我告诉了大家可以利用齐次方程组的基础解系反求齐次方程组。然后，我给大家讲了方程组解的性质，一共五句话。最后两个房间，我给大家介绍了与含参数方程组有关的两种题型以及解题方法。

4.8 练 习 题

1.选择题

（1）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)\vec{X}=\vec{0}$ ________。

（A）当 n>m 时仅有零解　　（B）当 n>m 时必有非零解

（C）当 m>n 时仅有零解　　（D）当 m>n 时必有非零解

解：$AB=A_{m\times n}\times B_{n\times m}=C_{m\times m}$，由此可知线性方程组 $(AB)\vec{X}=\vec{0}$ 是由 m 个方程 m 个未知数所组成的方程组。由第 3 章房间 306 的公式 1 可知：$r(A)\le m,r(A)\le n,r(B)\le m,r(B)\le n$；由第 3 章房间 306 的公式 3 可知：$r(AB)\le r(A),r(AB)\le r(B)$。所以：$r(AB)\le n$。

综上所述，齐次方程组 $(AB)\vec{X}=\vec{0}$ 的未知数个数是 m，而矩阵 AB 的秩 $r(AB)\le n$。所以当 $m>n$ 时，有 $r(AB)<m$。由第 3 章房间 302 所讲的求解齐次方程组的三个步骤中的第二步（判断解的类型）可知，当秩小于未知数个数时，齐次方程组有无穷多解。而我早就讲过，“齐次方程组有无穷多解”与“齐次方程组有非零解”是一个意思，所以当 $m>n$ 时，方程组 $(AB)\vec{X}=\vec{0}$ 必有非零解。选择（D）选项。

答案：（D）。

（2）设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，则该方程组的基础解系还可以表示成_____。

（A）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的一个等价向量组　　（B）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的一个等秩向量组

（C）$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$　　（D）$\vec{a}_1-\vec{a}_2,\vec{a}_2-\vec{a}_3,\vec{a}_3-\vec{a}_1$

解：“$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 基础解系”说明了三件事。第一是说明 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中含三个向量；第二是说明 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 是线性无关的；第三是说明 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 都是齐次方程组 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解。

（A）选项提到了“等价向量组”一词，等价向量组的概念我在第 3 章的第八车砖中给大家介绍过，并告诉了大家两个向量组是等价向量组可以推出两个向量等秩。（A）选项一看就不对，因为“$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的等价向量组”不一定只含三个向量，有可能含一百个向量呢！而 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中只能含三个向量。况且，就算 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的等价向量组中只含三个向量，也不能够判断含的这三个向量是否是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解。所以（A）选项中说的 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的一个等价向量组只能够推出该向量组与向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 等秩而已。所以（A）选项错误。

（B）选项就更不对了，因为（A）选项是（B）选项的子集。也就是说，一个向量组如果是 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的等价向量组，则该向量组一定是 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 的等秩向量组。（A）选项都不对，（B）选项就更不对了。

（C）选项中的向量组合为矩阵是 $\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right)$，此矩阵可表示为：

$$\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right)=\left(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}\neq 0$$

所以 $\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right)=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)P_1P_2\ldots P_n$ ，其中 $P_1,P_2,\ldots,P_n$ 为初等矩阵。此式相当于是给 $(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ 进行了若干次初等列变换，而初等变换是不改变矩阵的秩的。所以

$r\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1\right)=r(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)=3$，这说明$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 线性无关。由本章房间 404 的“第三句话”可知，$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 均为 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解。

综上所述：$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 是三个向量；$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 线性无关；$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 均为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解。所以$\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1$ 可以作为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系。所以（C）选项正确。

至于（D）选项，由于$1(\vec{a}_1-\vec{a}_2)+1(\vec{a}_2-\vec{a}_3)+1(\vec{a}_3-\vec{a}_1)=\vec{0}$，说明$\vec{a}_1-\vec{a}_2,\vec{a}_2-\vec{a}_3,\vec{a}_3-\vec{a}_1$ 线性相关，所以（D）选项错误。

答案：（C）。

（3）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则下列命题正确的是_______。

（A）如 $m<n$，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解

（B）如 $A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解，则 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解

（C）如 A 有 n 阶子式不为零，则 $A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解

（D）$A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(A)=n$

解：由于 A 有 m 行 n 列，所以 $A\vec{X}=\vec{0}$ 和 $A\vec{X}=\vec{b}$ 分别为：由 m 个方程 n 个未知数所组成的齐次方程组，由 m 个方程 n 个未知数所组成的非齐次方程组。

（A）选项中说 $m<n$，由第 3 章房间 306 的公式 1 可知，$r(A)\le m$，而 $m<n$，所以 $r(A)<n$，但是 $r(A)$ 不一定等于 $r(A|\vec{b})$，所以 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有无穷多解或无解。所以（A）选项错误。

（B）选项说 $A\vec{X}=\vec{0}$ 只有零解，这意味着 $r(A)=n$，但是 $r(A)$ 不一定等于 $r(A|\vec{b})$，所以 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解或无解。所以（B）选项错误。

（C）选项说 A 有 n 阶子式不为零，根据矩阵的秩的定义，可知 $r(A) \geq n$，又由第 3 章房间 306 的公式 1 可知，$r(A) \leq n$，所以 $r(A) = n$。所以 $A\vec{X} = \vec{0}$ 有唯一解，也就是只有零解（齐次线性方程组“有唯一解”和“只有零解”是一个意思，这我早就讲过）。所以（C）选项正确。

（D）选项说 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有唯一解的充要条件是 $r(A) = n$，所谓充要条件，意思就是可以互推，那我们就看看到底能不能互推。我们先从 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有唯一解出发：$A\vec{X} = \vec{b}$ 有唯一解可以推出 $r(A) = r(A|\vec{b}) = n$，即可以推出 $r(A) = n$，但 $r(A) = n$ 却推不出 $r(A) = r(A|\vec{b}) = n$，所以 $r(A) = n$ 推不出 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有唯一解，所以 $r(A) = n$ 并不是 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有唯一解的充要条件。（D）选项错误。

答案：（C）。

（4）非齐次线性方程组 $A\vec{X} = \vec{b}$ 中未知数的个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 A 的秩为 r，则正确命题是________。

（A）$r = m$ 时，方程组 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有解

（B）$r = n$ 时，方程组 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有唯一解

（C）$m = n$ 时，方程组 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有唯一解

（D）$r < n$ 时，方程组 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有无穷多解

解：（A）选项：矩阵 A 有 m 行 n 列。由于 $r = m$，所以 A 的 m 个行向量线性无关。根据第 3 章房间 303 的定理 3 的第二个推论（少无则多无，多相则少相），将 A 的 m 个行向量增加一维后，仍然是线性无关的，所以有 $r(A) = r(A|\vec{b})$，所以方程组 $A\vec{X} = \vec{b}$ 有解。

（A）正确。

（B）选项：$r(A) = n$ 推不出 $r(A) = r(A|\vec{b}) = n$。也就是说在 $r(A) = n$ 的前提下又可以

分两种情况：一是 $r(A)=r(A|\vec{b})=n$，方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 有唯一解；二是 $r(A)\neq r(A|\vec{b})$，方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 无解。所以（B）错误。

（C）选项：看一眼就知道此选项错误。此选项连 r 都没提，必然错误。

（D）选项：$r(A)<n$ 推不出 $r(A)=r(A|\vec{b})<n$。与（B）一样，有两种情况。所以（D）错误。

答案：（A）。

（5）设 A 是 5×4 矩阵，$A=(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)$，若 $\vec{b}_1=(1,1,-2,1)^T,\vec{b}_2=(0,1,0,1)^T$ 是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系，则 A 的列向量组的极大线性无关组是_______。

（A）$\vec{a}_1,\vec{a}_3$　　（B）$\vec{a}_2,\vec{a}_4$　　（C）$\vec{a}_2,\vec{a}_3$　　（D）$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_4$

解：由题意可知，$A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中含两个向量，即 $n-r(A)=2$，解得 $r(A)=2$。"极大线性无关组"一词与"最大线性无关组"、"最大无关组"是一个意思，所以此题问的是 A 的列向量组的一个最大无关组。由于矩阵 A 的秩为 2，矩阵的秩等于行向量组的秩也等于列向量组的秩，所以 A 的列向量组的秩为 2。由此可知 A 的列向量组的最大无关组中含两个向量，所以（D）错误。

因为 $\vec{b}_1$ 为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，所以有 $A\vec{b}_1=\vec{0}$。即：

$$(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3\,\vec{a}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\1\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2-2\vec{a}_3+\vec{a}_4=\vec{0} \qquad \text{①式}$$

因为 $\vec{b}_2$ 为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，所以有 $A\vec{b}_2=\vec{0}$。即：

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\vec{a}_2+\vec{a}_4=\vec{0} \qquad ②式$$

由②式可得，$\vec{a}_2,\vec{a}_4$ 是线性相关的，所以（B）错误。将②式代入①式得：$\vec{a}_1-2\vec{a}_3=\vec{0}$ 。由此可知，$\vec{a}_1,\vec{a}_3$ 线性相关，所以（A）错误。

答案：（C）。

2.填空题

（1）四元方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的三个解是 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$，其中 $\vec{a}_1=(1,1,1,1)^T$，$\vec{a}_2+\vec{a}_3=(2,3,4,5)^T$ 。如 $r(A)=3$，则方程组 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的通解是_______。

解：此题考的是本章的房间 404（线性方程组解的性质）。求 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的通解，我们只要求出 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解，然后加上题中所给的 $A\vec{X}=\vec{b}$ 的解 $\vec{a}_1$ 就可以了。由房间 404 的第四句话可知，$\vec{a}_2-\vec{a}_1,\vec{a}_3-\vec{a}_1$，都是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解，由房间 404 的第三句话可知，$1(\vec{a}_2-\vec{a}_1)+1(\vec{a}_3-\vec{a}_1)$ 也是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的解。

$$1(\vec{a}_2-\vec{a}_1)+1(\vec{a}_3-\vec{a}_1)=(\vec{a}_2+\vec{a}_3)-2\vec{a}_1=(2,3,4,5)^T-2(1,1,1,1)^T=(0,1,2,3)^T$$

由于 $r(A)=3$，$n-r(A)=4-3=1$，所以 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系中只含一个向量。我们刚才已经判断出了 $(0,1,2,3)^T$ 是 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的一个解，由于 $(0,1,2,3)^T$ 不是零向量，单个非零向量是线性无关的，所以 $(0,1,2,3)^T$ 可以作为 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的基础解系。所以 $A\vec{X}=\vec{0}$ 的通解为 $k(0,1,2,3)^T$。所以此题答案为 $k(0,1,2,3)^T+(1,1,1,1)^T$。

（2）设向量组 $\vec{a}_1=(2,1,1,1),\vec{a}_2=(2,1,a,a),\vec{a}_3=(3,2,1,a),\vec{a}_4=(4,3,2,1)$ 线性无关，则 a 应满足条件______________。

解：我在第 3 的房间 308 中为大家总结了证明线性相/无关的方法，一是利用向量组的秩来证，二是利用线性相/无关的定义式来证。此题我们利用向量组的秩来证。

由于题中说这四个向量是线性无关的，所以向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ 的秩为 4，所以矩阵 $(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3\,\vec{a}_4)$ 的秩为 4。我们就利用第 2 章第 2.3.3 节所讲的求矩阵的秩的方法去做就可以了。但是由于矩阵中含参数 a，所以此题有可能会用到本章房间 405 与房间 406 所讲的方法。之所以我说“有可能”而没说“一定”，是因为万一参数出现在化阶梯形的偶数步，那么就用不上房间 405 与房间 406 所讲的方法。

$$\begin{pmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&a-1&a-1\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&a-\frac{3}{2}\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-1\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&a-\frac{3}{2}\\0&0&a-1&a-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-1\\0&0&-\frac{1}{2}&a-1\\0&0&a-1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2a+2\\0&0&a-1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-1\\0&0&1&2a+2\\0&0&0&a-1-(-2a+2)(a-1)\end{pmatrix}$$

由于 $r=4$，所以 $a-1-(-2a+2)(a-1)\neq 0$，整理得：$2a^2-3a+1\neq 0$，解得 $a\neq 1$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$。

3.计算和证明题

（1）a、b、c 不全为零，证明方程组 $\begin{cases}ax_2+bx_3+cx_4=0\\ax_1+x_2=0\\bx_1+x_3=0\\cx_1+x_4=0\end{cases}$ 只有零解。

解：此方程组中方程个数与未知数个数相等（都是 4），所以若系数行列式 D 不等于零的话，那么此题就可以用第 1 章讲的克拉默法则来做，这也正是我出此题的目的，让大家别忘了克拉默法则。

系数行列式 $D=\begin{vmatrix}0 & a & b & c\\ a & 1 & 0 & 0\\ b & 0 & 1 & 0\\ c & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

通过计算，$D=-(a^2+b^2+c^2)$。由于 a、b、c 不全为零，所以 $D\neq 0$，说明可以用第 1 章第五车砖中所讲的克拉默法则来解此方程组。由于 D_1、D_2、D_3、D_4 均为 0，而 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$、$x_2=\dfrac{D_2}{D}$、$x_3=\dfrac{D_3}{D}$、$x_4=\dfrac{D_4}{D}$，所以 x_1、x_2、x_3、x_4 均为 0，所以此方程组只有零解（我这是用第 1 章第五车砖讲的克拉默法则做的，其实也可以用第 1 章房间 102 讲的克拉默法则的推论来做，那样能更快的得出结论）。

4.9 结 尾 语

同学们，复习考研数学的过程中一定不要有心理压力。有的同学总想着：哎呀，复习了这么久，就为了一锤子买卖，万一考研题出得偏或者难，万一考不好，那这么长时间的努力就都白费了。有这种想法的同学在复习时就会有心理压力，从而影响复习效果。

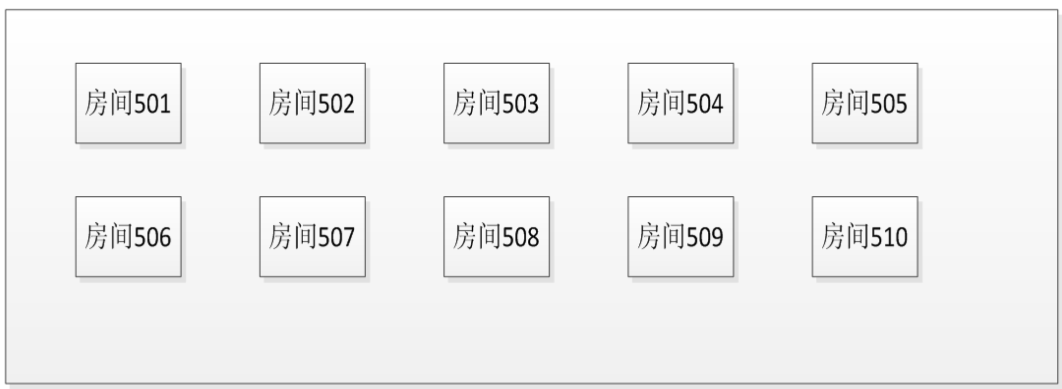
实际上，这种心里压力完全不用有，因为你只要复习到位了，就不会考不好的。我这么说并非过于绝对，而是因为考研数学完全是可以被我们所掌控的。就拿考研数学一来说吧，一共三科：高等数学、线性代数、概率论与数理统计，如果你复习很充分，那么在考场上你应该是拿起题就做，根本不用想。

说具体点，比如说高等数学中关于极限的计算题，我总结了七种方法：代入法，等价无穷小替换法，洛必达法则，泰勒公式法，夹逼定理法，积分和式法，递推公式法。只要是计算函数极限，就想前四种；只要是计算数列极限，就想后三种。这当然不算完，我还有更具体的总结，最终实现一一对应（我一看题，就马上用我总结的“傻瓜式”方法判断用七种方法中的哪种）；再比如说高等数学中关于三重积分的计算题，我总结的就是：一看题，首先判断是用直角坐标系做还是用球坐标系做（利用我总结的“傻瓜式”方法判断，就这两种，永远出不了第三种），如果是用直角坐标系做，那么再判断是用“先一后二型”还是用“先二后一型”（当然，我也总结了“傻瓜式”的判断方法），剩下的就是纯计算问题了；还有，为了解决很多同学空间想象能力差、立体图不会画的问题，我总结了四种立体图，有关三重积分、第一类曲面积分、第二类曲面积分的计算题永远跑不出去这四种图。这么一来就根本不用再画立体图了。

现在我告诉大家，考研数学（包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计）所涉及到的所有知识和题型都可以“傻瓜化”。因此同学们在复习时千万不要有心理压力（比如担心考不好），考研数学考得很“死”，只要认真且全面的复习了，就一定没问题的。



第 5 章　第五层——特征值、特征向量、相似矩阵



当大家看到车的标志，就可以分辨“奥迪”、“宝马”和“奔驰”。车标就相当于“特征值、特征向量”。相似三角形了解不？相似矩阵比相似三角形更简单。

5.1　第一车砖——

特征值、特征向量的基本概念

矩阵A是一个 n 行 n 列的方阵，$\vec{\xi}$是一个 n 维列向量，我问大家，$A\vec{\xi}$存在吗？当然存在，因为$\vec{\xi}$可以看成是一个 n 行一列的矩阵，一个 n 行 n 列的矩阵当然可以左乘一个 n 行一列的矩阵，乘完之后得到的是一个 n 行一列的矩阵，即$A\vec{\xi}$是 n 维列向量。这是早在第 1 章就讲过的知识点。

那我现在再问大家一个问题，λ是一个数字，$\vec{\xi}$是一个 n 维列向量。$\lambda\vec{\xi}$存在吗？这不是废话嘛！当然存在。这不就是第 1 章讲的数字与矩阵相乘嘛，只不过这个矩阵比较特殊（是向量）而已，乘完的结果$\lambda\vec{\xi}$是 n 维列向量。这是再简单不过的知识点。

通过以上分析，我们知道$A\vec{\xi}$是一个 n 维列向量，$\lambda\vec{\xi}$也是一个 n 维列向量。后来人们发现了这样一个现象：只要A是一个方阵，那么总能找出数λ与**非零向量**$\vec{\xi}$，使得$A\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$。下面我说一下特征值、特征向量的定义式。

设A是方阵，使得$A\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$　（$\vec{\xi}\neq\vec{0}$）成立的数λ和非零向量$\vec{\xi}$分别称为：方阵A的特征值，方阵A的对应于特征值λ的特征向量（或称：方阵A的特征值λ所对应的特征向量）。

5.2　第二车砖——

特征值、特征向量的计算方法

一个方阵的特征值和特征向量可以通过某种计算方法计算出来吗？当然可以。下面我就来给大家推导一下特征值和特征向量的计算方法。

由于矩阵A、矩阵A的特征值λ、矩阵A的对应于特征值λ的特征向量$\vec{\xi}$这三者满足

关系式：$A\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$（$\vec{\xi}\neq\vec{0}$）

所以有 $A\vec{\xi}-\lambda\vec{\xi}=\vec{0}$

所以有 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$

我们现在构造一个齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{X}=\vec{0}$。由于 $\boldsymbol{E}$ 为方阵，所以 λE 为方阵。A 肯定也为方阵（要不然根本不能减），所以 $A-\lambda E$ 为方阵。也就是说，我们构造的这个方程组是一个“方程个数等于未知数个数”的方程组。由 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 可知，$\vec{\xi}$ 是齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{X}=\vec{0}$ 的解，又因为 $\vec{\xi}$ 是非零向量（特征向量的定义规定特征向量必须是非零向量），所以说明我们构造的齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{X}=\vec{0}$ 有非零解。根据第 **1** 章房间 **102** 中讲的充分必要条件，立刻可以得到行列式 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$。

我们就是利用这个等式来计算特征值的，因此有很多人只记住了这个计算特征值的公式，完全不管这个公式是如何推导出来的，以后碰到求特征值的题就直接用这个公式。我想说的是：这当然是可以的，但是这种学习习惯我不提倡，而且这样记得也不牢靠，所以建议大家还是要知道此公式的推导过程。

好，现在我接着说如何求特征向量。先来告诉大家一件事：方阵 A 是几阶方阵，利用 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 求出的特征值就会有几个，这一点在接下来的题中就会体现出来。那么既然矩阵的特征值不止一个，我们在求特征向量时，就必须针对每个不同的特征值分别求各自的特征向量。那么特征向量到底该怎么求呢？我举个例子来讲。

比如矩阵 A 是一个三阶方阵（三行三列的矩阵），假设我们已经利用求特征值的公式 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ 求出了矩阵 A 的三个不同的特征值 λ_1、λ_2、λ_3。现在我们来求特征值 λ_1 对应的特征向量，把 λ_1 代入到以上我们推导出的含 λ 的方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 中替换

λ，**得到了一个不含未知参数的方程组** $(A-\lambda_1 E)\vec{\xi}=\vec{0}$**，然后就用第 3 章房间 302 所讲的求解齐次方程组的方法来求解这个齐次方程组就行了，求得的通解就是** λ_1 **这个特征值对应的特征向量**（但是有一点需要注意，由于定义中规定特征向量 $\vec{\xi}$ 必须是非零向量，所以“求特征向量”与“求齐次方程组通解”唯一的区别就在于：乘在基础解系中的每个向量前面的常数不能同时为零）。λ_2 所对应的特征向量和 λ_3 所对应的特征向量也是用同样的方法求。

考研题 5.1 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量。

解：根据之前讲的，必须先求特征值，然后对不同的特征值分别求各自对应的特征向量。**虽然此时此刻我们还没有求特征值，但我们可以知道该矩阵共有三个特征值，因为该矩阵是一个三行三列的矩阵。**

下面我们来求矩阵 A 的特征值。**根据之前讲的，我们需要通过** $|A-\lambda E|=0$ **来解出特征值** λ。

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda&-1&1\\2&-2-\lambda&2\\-1&1&-1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 2 & -2-\lambda & 2\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $|A-\lambda E|=0$，即 $\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 2 & -2-\lambda & 2\\ -1 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$

根据第 1 章讲的行列式的解法，得：

$$\lambda^2(\lambda+2)=0$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=-2$（记住，千万不要写成 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2$，这可是致命性的错误。因为 $\lambda^2(\lambda+2)=0$ 相当于是 $(\lambda-0)(\lambda-0)(\lambda+2)=0$）。当然，也可以写成 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=0$。

好，现在我们已经求完矩阵 A 的特征值了，共三个特征值。其中有两个特征值相等，即 $\lambda_1=\lambda_2=0$，还有一个特征值是 $\lambda_3=-2$。那么现在，我们要开始求特征向量了。**我之前讲过，要针对不同的特征值求其对应的特征向量。**此题的矩阵 A 的不同的特征值有两个，0 和 -2。所以我们现在分别针对特征值 0 和特征值 -2 求特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时：

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(A-0E)\vec{\xi}=\vec{0}$，即 $A\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $A\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可。就用第 3 章房间 302 所讲的方法求解，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

（1）将 $A\vec{\xi}=\vec{0}$ 中的 A 化为矩阵的形式并求秩。

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r=1$

（2）判断解的类型。

由于 $r<n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$。因为 $n - r = 2$，所以取 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，解得 $x_1 = -1$；取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，解得 $x_1 = 1$。

所以此方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$。

所以此方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是任意常数。

所以特征值 0 对应的特征向量为：$k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是不同时为零的任意常数。

到此为止，$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 所对应的特征向量已经求解完了。由此可知，特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 所对应的特征向量有无数个，但是这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中只含两个向量，也就是说，虽然特征值 0 对应着无数个特征向量，但是从中挑出 $a(a > 2)$ 个特征向量，则这 a 个特征向量一定是线性无关的。

当 $\lambda_3 = -2$ 时：

齐次方程组 $(A - \lambda E)\vec{\xi} = \vec{0}$ 变为了 $(A + 2E)\vec{\xi} = \vec{0}$，解出方程组 $(A + 2E)\vec{\xi} = \vec{0}$ 的通解即可。就用第 3 章房间 302 所讲的方法求解，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

（1）将 $(A + 2E)\vec{\xi} = \vec{0}$ 中的 $A + 2E$ 化为矩阵的形式并求秩。

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$。

（2）判断解的类型。

由于 $r < n$，所以此齐次方程组有无穷多解。

（3）求解。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

因为 $n-r=1$，所以取 $x_2=2$（当然 x_2 也可以不取 2 而是取别的数，或者根本不取 x_2 而是取 x_3），解得 $x_1=1$， $x_3=-1$ 。

所以此方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$。

所以此方程组的通解为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，其中 k 是任意常数。

所以特征值-2 对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，其中 k 是不为零的任意常数。

到此为止， $\lambda_3=-2$ 所对应的特征向量已经求解完了。由此可知，特征值 $\lambda_3=-2$ 所对应的特征向量有无数个。但是这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中只含一个向量。也就是说，虽然特征值 -2 对应着无数个特征向量，但是从中挑出 $a(a>1)$ 个特征向量，则这 a 个特征向量一定是线性相关的。

现在我要告诉大家一个很有用的结论：设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值。$\vec{\xi}_1$ 是矩阵 A 对应于特征值 λ_1 的无数个特征向量中的一个，$\vec{\xi}_2$ 是矩阵 A 对应于特征值 λ_2 的无数个特征向量中的一个，则 $\vec{\xi}_1$ 、 $\vec{\xi}_2$ 必线性无关。**这个结论可以简记为：对于至少存在两个不同特征值的任意矩阵 A 来说，矩阵 A 的两个来自于不同特征值的特征向量必线性无关。**

5.3　第三车砖——对称矩阵、正交矩阵的复习

本节的内容纯属复习，对称矩阵的概念我是在第 2 章讲给大家的，正交矩阵的概念我是在第 3 章讲给大家的。本章的房间中要大量用到对称矩阵以及正交矩阵，因此给大家复习一下。

对称矩阵：如果方阵 A 满足 $A^T=A$，则称方阵 A 为对称矩阵，简称对称阵。

例. $A=\begin{pmatrix}8&5&3\\5&4&6\\3&6&7\end{pmatrix}$，问矩阵 A 是否为对称矩阵？

解：$A^T=\begin{pmatrix}8&5&3\\5&4&6\\3&6&7\end{pmatrix}$，由于 $A^T=A$，所以矩阵 A 是对称矩阵。

正交矩阵：如果方阵 A 满足 $A^TA=AA^T=E$，则称方阵 A 为正交矩阵，简称正交阵。

正交矩阵的等价定义：如果矩阵 A 满足 $A^T=A^{-1}$，则称矩阵 A 为正交矩阵，简称正交阵。

再来复习一下正交矩阵的充分必要条件：A 是正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 中的任意两个行向量都是正交的且 A 中的任意一个行向量都是单位向量 $\Leftrightarrow$ A 中的任意两个列向量都是正交的，并且 A 中的任意一个列向量都是单位向量。

例：$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，问矩阵 A 是否为正交矩阵？

解：**我们就利用正交矩阵的充分必要条件来做。**

设 $A=(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$，其中 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$。

$(\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times0+0\times1+\frac{1}{\sqrt{2}}\times0=0$，所以 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 正交。

$(\vec{a}_1,\vec{a}_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+0\times0+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$，所以 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_3$ 正交。

$(\vec{a}_2,\vec{a}_3)=0\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1\times0+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$，所以 $\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 正交。

$\sqrt{(\vec{a}_1,\vec{a}_1)}=\sqrt{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}}=1$，所以 $\vec{a}_1$ 为单位向量。

$\sqrt{(\vec{a}_2,\vec{a}_2)}=\sqrt{0+1+0}=1$，所以 $\vec{a}_2$ 为单位向量。

$\sqrt{(\vec{a}_3,\vec{a}_3)}=\sqrt{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}}=1$，所以 $\vec{a}_3$ 为单位向量。

由正交矩阵的充分必要条件可知，矩阵 A 为正交矩阵。

此题还可以按如下做法来做。

设 $A=\begin{pmatrix}\vec{b}_1\\\vec{b}_2\\\vec{b}_3\end{pmatrix}$，$\vec{b}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\vec{b}_2=(0,1,0)$，$\vec{b}_3=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。

$\left(\vec{b}_1,\vec{b}_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times 0+0\times 1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times 0=0$，所以 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_2$ 正交。

$\left(\vec{b}_1,\vec{b}_3\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+0\times 0+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$，所以 $\vec{b}_1$、$\vec{b}_3$ 正交。

$\left(\vec{b}_2,\vec{b}_3\right)=0\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1\times 0+0\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0$，所以 $\vec{b}_2$、$\vec{b}_3$ 正交。

$\sqrt{\left(\vec{b}_1,\vec{b}_1\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}}=1$，所以 $\vec{b}_1$ 为单位向量。

$\sqrt{\left(\vec{b}_2,\vec{b}_2\right)}=\sqrt{0+1+0}=1$，所以 $\vec{b}_2$ 为单位向量。

$\sqrt{\left(\vec{b}_3,\vec{b}_3\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}}=1$，所以 $\vec{b}_3$ 为单位向量。

由正交矩阵的充分必要条件可知，矩阵 A 为正交矩阵。

5.4　第四车砖——矩阵有多少个特征值为零

在前面的第二车砖中，我告诉了大家求特征值的方法。本节，我们要讨论一个矩阵有多少个特征值为 0。看到这里，估计有很多同学认为讲本节是多余的，认为只要用前面的第二车砖所讲的方法求出所有特征值，不就自然知道有多少个特征值为 0 了嘛。然而实际

上，本节并不多余。

本节我要给大家讲的是：通过方阵 A 的秩 $r(A)$ 来判断方阵 A 到底有多少个特征值为 **0**。

> 方阵 A 为 **n** 阶方阵（**n** 行 **n** 列的矩阵），设方阵 A 的秩为 **r**。
>
> 若 **r=n**，则方阵 A 的 **n** 个特征值中没有任何一个特征值为 **0**；
>
> 若 **r<n**，则方阵 A 的 **n** 个特征值中至少有 **n-r** 个特征值为 **0**，并且还是在 **r<n** 的情况下，若方阵 A 为对称矩阵，则方阵 A 的 **n** 个特征值中只有 **n-r** 个特征值为 **0**。

例. $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}$，问矩阵 A 有几个特征值为 0?

解：由于矩阵 A 是三阶矩阵，所以矩阵 A 肯定是有三个特征值，这一点是毫无疑问的，这在前面的第二车砖中讲过。

现在我们来看本题的问题。本题的问题是问矩阵 A 的三个特征值中有几个为 0。本题共有两种做法：

- **第一种做法是按照本章第二车砖所讲的求特征值的方法，把矩阵 A 的三个特征值都求出来，这样一来自然就知道矩阵 A 有几个特征值为 0 了；**
- **第二种做法是按照本节所讲的方法，通过矩阵 A 的秩来解此题。**

如果采用第二种做法的话，有两点需要注意的地方。**第一点需要注意的地方是：由于此题给出的矩阵 A 很明显不是对称矩阵，所以用本节的方法只能判断出矩阵 A 至少有多少个特征值为 0，而无法判断出矩阵 A 究竟有多少个特征值为 0；第二点需要注意的地方是：本节所讲的方法只关注 0，而不关注其他特征值。**

因此，我们先用本节所讲的方法判断一下矩阵 A 至少有多少个特征值为 0。然后，我们再真正地去求这三个特征值。

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A)=1,n-r(A)=2$，由本节所讲内容可知，矩阵 A 的三个特征值中至少有两个是 0。

现在我们来真正求一下矩阵 A 的特征值，看看是不是这么回事。

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\8&16&-8\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&-1\\2&4-\lambda&-2\\8&16&-8-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-1\\2&4-\lambda&-2\\8&16&-8-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $\left|A-\lambda E\right|=0$，即 $\begin{vmatrix}1-\lambda&2&-1\\2&4-\lambda&-2\\8&16&-8-\lambda\end{vmatrix}=0$

根据第 1 章讲的行列式的计算方法，得：

$$\lambda^2\left(\lambda+3\right)=0$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=-3$。

大家看见了吧，果然是“至少有两个特征值是 0”，这也验证了本节所讲结论的正确性。

5.5　第五车砖——相似矩阵

这一节，我来给大家介绍相似矩阵。**设 A 是 n 阶矩阵，B 也为 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，则称矩阵 A 相似于矩阵 B，记为 $A\sim B$。**

相似矩阵的定义很简单，但有一个隐含的知识点我要给大家指出来。相似矩阵的定义

式中的矩阵 P 是可逆矩阵，矩阵 P^{-1} 当然也是可逆矩阵。我早就讲过，可逆矩阵可以写为若干初等矩阵乘积的形式，而一个矩阵左/右乘初等矩阵相当于给该矩阵进行相应的初等行/列变换，又因为初等变换是不改变矩阵的秩的，所以“矩阵 A 相似于矩阵 B ”可以推出“ A 、B 两个矩阵等秩”。即：若 $P^{-1}AP=B$ ，则 $r(A)=r(B)$。

最后，我要告诉大家相似矩阵的性质：

（1） $A\sim A$ **，反身性；**

（2）若 $A\sim B$ **，则** $B\sim A$ **，对称性；**

（3）若 $A\sim B$ **，** $B\sim C$ **，则** $A\sim C$ **，传递性。**

5.6　第六车砖——对角化

有关对角矩阵，我们在第 1 章就已经讲过了。对角矩阵与我们本节所要讲的新知识点有着密切的联系，因此我先给大家复习一下对角矩阵。

所谓对角矩阵，首先得是方阵，也就是说，如果一个矩阵连方阵都不是（行数不等于列数），那它绝对不可能是对角矩阵。我们接着说，**对角矩阵不仅是方阵，而且还是特殊的方阵，特殊性体现在：除了对角线（矩阵中从左上到右下的斜线）以外的所有数都为 0（对角线上的数有没有 0 无所谓）。**

经过复习，大家应该想起什么叫对角矩阵了吧。**千万别把对角矩阵和对称矩阵弄混了，这可是完全不同的两个概念。对角矩阵一般用符号“Λ”表示，所以以后看见“Λ”，你们得马上反应过来指的是对角矩阵。**

好，那么现在我们来讲解本节的新知识点。在上一节中，我们了解到，若 $P^{-1}AP=B$ ，则称矩阵 A 相似于矩阵 B 。现在我要告诉大家的是，**若 $P^{-1}AP=B$ 中的 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵Λ，则称矩阵 A 相似于对角矩阵Λ，也称矩阵 A 可以对角化。换言之，若 $P^{-1}AP=\Lambda$ ，则称矩阵 A 相似于对角矩阵Λ，也称矩阵 A 可以对角化。**

5.7 第七车砖——合同矩阵

本节要给大家介绍的知识点是合同矩阵。设 A 、B 是两个 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$ ，则称 A 合同于 B，记为 $A\cong B$ 。

合同矩阵的定义式与相似矩阵的定义式类似，所以请大家务必要区分清楚，千万别记混了。相似矩阵的定义式是 $P^{-1}AP=B$ ，而合同矩阵的定义式是 $P^{\mathrm{T}}AP=B$ ；两个矩阵相似记为 $A\sim B$ ，而两个矩阵合同记为 $A\cong B$ 。

刚才跟大家强调的是相似矩阵和合同矩阵的区别，现在跟大家说一下相似矩阵和合同矩阵的相同点。相似矩阵和合同矩阵的相同点有两个。

- 第一个共同点是：矩阵 A 相似于矩阵 B 可以推出两个矩阵等秩，矩阵 A 合同于矩阵 B 也可以推出两个矩阵等秩。
- 第二个共同点是：合同与相似一样，也具有反身性、对称性、传递性。即 $A\cong A$（反身性）；若 $A\cong B$，则 $B\cong A$（对称性）；若 $A\cong B$，$B\cong C$，则 $A\cong C$（传递性）。

终于把砖运来了

同学们，本章的砖已经运来了，接下来就可以搭建房间了。本楼层共有十个房间，看似比较多，但实际上这些房间搭建起来是非常简单的。别忘了，接下来“房间”中的内容，不但要掌握，还要熟练默写下来。

5.8　房间 501——如何证明两个矩阵有相同的特征值

方法 **1.** 把矩阵 A 和矩阵 B 的特征值都求出来（用于矩阵 A、矩阵 B 都显化给出的题）。

方法 **2.** 若能证明 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$，则矩阵 A 和矩阵 B 有相同的特征值。

考研题 5.2　证明方阵 A 和 A^T 有相同的特征值。

解：由于 A 和 A^T 没有显化地给出，所以我们采用方法 2 来做。

$$|A-\lambda E|=|(A-\lambda E)^T|=|A^T-(\lambda E)^T|=|A^T-\lambda E^T|=|A^T-\lambda E|$$

由方法 2 可知，A 和 A^T 有相同的特征值。此题我们是利用方法 2 来证明的，而此题的结论又可以当成是证明两个矩阵有相同的特征值的一种方法——这就是下面的方法 3。

方法 **3.** 方阵 A 和 A^T 有相同的特征值。

考研题 5.3　若 $A\sim B$，证明：A、B 有相同的特征值。

解：$A\sim B$ 的意思是矩阵 A 相似于矩阵 B（这在之前讲过），本题我们采用上述三种方法中的方法 2 来做。

只要证明$|B-\lambda E|$与$|A-\lambda E|$相等即可。

$|B-\lambda E|$

$=|P^{-1}AP-\lambda E|$（因为A、B是相似矩阵）

$=|P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P|$（因为$P^{-1}P=E$）

$=|P^{-1}(A-\lambda E)P|$（因为矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律）

$=|P^{-1}|\times|A-\lambda E|\times|P|$（因为当$A$、$B$、$C$为同阶方阵时，$|ABC|=|A||B||C|$）

$=|A-\lambda E|$（因为$=|P^{-1}|\times|P|=1$，这在第1章就讲过）

所以A、B有相同的特征值。与考研题5.2一样，此题的结论可以当成是证明两个矩阵有相同特征值的一种方法——这就是下面的方法4。

方法4.若$A\sim B$，则A、B有相同的特征值。

考研题5.4 设A、B均为n阶矩阵，并且这两个矩阵还都是对称矩阵，证明AB和BA有相同的特征值。

解法1：利用上述四种方法中的方法3，证明$(AB)^T=BA$即可。

$(AB)^T$

$=B^TA^T$（这是第2章的公式）

$=BA$（因为A、B为对称矩阵，所以有$B^T=B,A^T=A$）

解法2：利用上述四种方法中的方法2，证明$|\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$即可。

$|\lambda E-AB|$

$=|(\lambda E-AB)^T|$（一个行列式的转置等于它本身）

$=|(\lambda E)^T-(AB)^T|$（因为$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$）

$=|\lambda E^T-B^TA^T|$（因为$(\lambda E)^T=\lambda E^T,(AB)^T=B^TA^T$）

$=\left|\lambda E-B^{T}A^{T}\right|$（因为 $E^{T}=E$）

$=\left|\lambda E-BA\right|$（因为 A、B 为对称矩阵，所以有 $B^{T}=B,A^{T}=A$）

考研题 5.5 设 A、B 均为 n 阶矩阵，A 为可逆矩阵，证明 AB 和 BA 有相同的特征值。

解：此题利用上述四种方法中的方法 4，证明 $AB\sim BA$ 即可。证明 AB 和 BA 相似，也就是证明存在矩阵 P，使得 $P^{-1}(AB)P=BA$。

由于 A 为可逆矩阵，所以 A^{-1} 存在。

$A^{-1}(AB)A$

$=(A^{-1}A)BA$（因为矩阵乘法具有结合律，可以随便加括号）

$=BA$（因为 $A^{-1}A=E$，而 E 乘以任何矩阵都等于该矩阵本身）

所以 $AB\sim BA$，所以 AB 和 BA 有相同的特征值。

5.9　房间 502——几个需要记住的结论

5.9.1　结论 1

一个矩阵的所有特征值之和等于该矩阵对角线上的所有数字之和。

例. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$，求该矩阵的所有特征值之和。

解：该矩阵是一个三阶矩阵，所以该矩阵一共有三个特征值。我们记该矩阵的三个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3，根据结论 1，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+5+9=15$。

大家一定要注意，结论 1 说的是“之和”等于“之和”，也就是说，仅仅是“之和”相等。就拿这道题来说吧，并不是矩阵 A 的三个特征值就是对角线上的三个数 1、5、9，只是矩阵 A 的三个特征值之和等于对角线上的三个数之和而已，明白了吧。

例. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ 8 & 16 & -8\end{pmatrix}$，求该矩阵的特征值。

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ 8 & 16 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$r(A)=1, n-r(A)=3-1=2$

由本章第四车砖所讲的内容可知，矩阵 A 的三个特征值中至少有两个特征值是 0。我们记为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，λ_3 未知。由刚刚讲完的结论 1 可知，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1+4+(-8)=-3$，解得 $\lambda_3=-3$。大家看见了吧，这可比用常规的方法去解特征值要容易得多。

5.9.2 结论 2

一个矩阵的所有特征值之积等于该矩阵所对应的行列式的值。

例. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ 8 & 16 & -8\end{pmatrix}$，求该矩阵 A 的所有特征值之积。

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ 8 & 16 & -8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$r(A)=1, n-r(A)=3-1=2$

由于矩阵 A 不满秩，所以根据第 2 章房间 201 的大总结可知，$|A|=0$。我们将矩阵 A 的三个特征值记为 λ_1、λ_2、λ_3。根据刚刚讲完的结论 2，立刻有 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$。

5.9.3 结论 3

对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵的特征值就是对角线上的元素。

例. 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 9\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}$ 的特征值。

解：由于 A 是对角矩阵，所以 A 的三个特征值 $\lambda_1=3$、$\lambda_2=4$、$\lambda_3=0$。

由于 B 是下三角矩阵，所以 B 的三个特征值 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=5$、$\lambda_3=2$。

由于 C 是上三角矩阵，所以 C 的三个特征值 $\lambda_1=3$、$\lambda_2=2$、$\lambda_3=7$。

5.9.4　结论 4

如果一个 **n** 阶矩阵的每行元素之和都相等的话（记每行元素之和为数 a），则 a 就是该矩阵的 **n** 个特征值中的一个特征值，且特征值 a 所对应的特征向量为

$$k\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{n\times1}$$

，其中 k 是不为零的任意常数。

例. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&b&b&b\\b&1&b&b\\b&b&1&b\\b&b&b&1\end{pmatrix}$，利用刚刚讲的结论 4，求矩阵 A 的一个特征值以及对应的特征向量。

解：此题所给的矩阵的每行元素之和都相等，都是 3b+1。根据刚刚讲的结论 4，3b+1 即为该矩阵的四个特征值中的一个，且特征值 3b+1 对应的特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 是不为零的任意常数。

5.10　房间 503——与特征向量有关的证明题通常会用到反证法

考研题 5.6　设 λ_1、λ_2 是方阵 A 的两个**不同的**特征值，$\vec{\xi}$ 是特征值 λ_1 所对应的特征向量。证明：$\vec{\xi}$ 不是特征值 λ_2 所对应的特征向量（即一个特征向量不能属于两个不同的特征值）。

解：此题利用反证法来做。

由题意可知：$A\vec{\xi}=\lambda_1\vec{\xi}$。

利用反证法，假设$\vec{\xi}$也是λ_2所对应的特征向量，则有$A\vec{\xi}=\lambda_2\vec{\xi}$。

所以有$\lambda_1\vec{\xi}=\lambda_2\vec{\xi}$，变形得$(\lambda_1-\lambda_2)\vec{\xi}=\vec{0}$。由于定义中规定特征向量不能是零向量，所以只能是$\lambda_1-\lambda_2=0$，这与题中所说的$\lambda_1$、$\lambda_2$是两个不同的特征值相矛盾，所以此假设不成立，所以$\vec{\xi}$不是$\lambda_2$所对应的特征向量。

考研题 5.7 设$\vec{\xi_1}$、$\vec{\xi_2}$是矩阵A分别对应于不同特征值λ_1、λ_2的特征向量。证明：$\vec{\xi_1}+\vec{\xi_2}$不是 A 的特征向量。

解：本题和上道题一样，利用反证法来做。

假设$\vec{\xi_1}+\vec{\xi_2}$是A的特征向量，其对应的特征值是μ。则有：

$A(\vec{\xi_1}+\vec{\xi_2})=\mu(\vec{\xi_1}+\vec{\xi_2})$　　①式

由于$\vec{\xi_1}$是A对应于特征值λ_1的特征向量，所以有：

$A\vec{\xi_1}=\lambda_1\vec{\xi_1}$　　②式

由于$\vec{\xi_2}$是A对应于特征值λ_2的特征向量，所以有：

$A\vec{\xi_2}=\lambda_2\vec{\xi_2}$　　③式

将①式的左侧用分配律展开，有：

$A\left(\vec{\xi_1}+\vec{\xi_2}\right)=A\vec{\xi_1}+A\vec{\xi_2}$　　④式

用①式的右侧替换④式的左侧，有：

$\mu\left(\vec{\xi_1}+\vec{\xi_2}\right)=A\vec{\xi_1}+A\vec{\xi_2}$　　⑤式

用②式、③式的右侧替换⑤式的右侧，有：

$\mu\left(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2\right)=\lambda_1\vec{\xi}_1+\lambda_2\vec{\xi}_2$　　　　⑥式

将⑥式的左侧展开得：

$\mu\left(\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2\right)=\mu\vec{\xi}_1+\mu\vec{\xi}_2$　　　　⑦式

将⑥式的右侧替换成⑦式的左侧，有：

$\lambda_1\vec{\xi}_1+\lambda_2\vec{\xi}_2=\mu\vec{\xi}_1+\mu\vec{\xi}_2$　　　　⑧式

将⑧式整理得：

$(\lambda_1-\mu)\vec{\xi}_1+(\lambda_2-\mu)\vec{\xi}_2=\vec{0}$　　　　⑨式

由本章第二车砖可知，不同特征值所对应的特征向量线性无关。而$\vec{\xi}_1$、$\vec{\xi}_2$正好是两个不同的特征值λ_1、λ_2所对应的特征向量，所以$\vec{\xi}_1$、$\vec{\xi}_2$线性无关。由线性无关的定义再结合⑨式可得：

$\lambda_1-\mu=0$，解得$\lambda_1=\mu$。

$\lambda_2-\mu=0$，解得$\lambda_2=\mu$。

所以$\lambda_1=\lambda_2$，这与题中说的“λ_1、λ_2是不同的特征值”相矛盾，所以此假设不成立，所以$\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2$不是A的特征向量。

5.11　房间 504——通过 A 的特征值、特征向量来推关于 A 的多项式的特征值、特征向量

设λ_1是矩阵A的一个特征值，$\vec{\xi}_1$是矩阵A对应于特征值λ_1的特征向量（当然，矩阵A对应于特征值λ_1的特征向量有无数个，$\vec{\xi}_1$只是其中一个），$f(A)$是关于A的一个多项式（比如$f(A)=5A^2+4A$），则有如下结论成立：$f(\lambda_1)$是矩阵$f(A)$的一个特征值；$\vec{\xi}_1$是矩阵$f(A)$对应于特征值$f(\lambda_1)$的特征向量。

以上的话同学们可能会感觉抽象，没有关系，我现在再用比较通俗的话解释一遍。以上我说了两件事，一件是关于特征值的，另一件是关于特征向量的。我是这样说的：若λ_1为A的一个特征值，则把λ_1代到含A的多项式中去替换A，得到的数$f(\lambda_1)$就是矩阵$f(A)$的一个特征值；若某向量是矩阵A对应于特征值λ_1的特征向量，则该向量肯定也是矩阵$f(A)$对应于特征值$f(\lambda_1)$的特征向量。

考研题 5.8 三阶矩阵 A 有特征值-1、1、2。$B = A - 3A^2$，则 $|B| =$ ______。

解：矩阵 A 的特征值有三个，$\lambda_1 = -1$、$\lambda_2 = 1$、$\lambda_3 = 2$。此题让求的是矩阵 B 所对应的行列式的值，B 是一个关于 A 的多项式，所以 B 也是三阶矩阵。也就是说，矩阵 B 也是有三个特征值，记矩阵 B 的三个特征值为 $\overline{\lambda}_1$、$\overline{\lambda}_2$、$\overline{\lambda}_3$。由房间 502 的结论 2 可知，$|B| = \overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2\overline{\lambda}_3$，所以我们只要把矩阵 B 的三个特征值 $\overline{\lambda}_1$、$\overline{\lambda}_2$、$\overline{\lambda}_3$ 都求出来，就可以算是大功告成了。

根据刚刚所讲的知识点：

$\overline{\lambda}_1 = -1 - 3\times(-1)^2 = -4$

$\overline{\lambda}_2 = 1 - 3\times 1^2 = -2$

$\overline{\lambda}_3 = 2 - 3\times 2^2 = -10$

$|B| = \overline{\lambda}_1\overline{\lambda}_2\overline{\lambda}_3 = -4\times(-2)\times(-10) = -80$

考研题 5.9 设 A 是三阶矩阵，有特征值 1、−1、2，则下列矩阵中哪个是可逆矩阵？

（A）$E - A$　（B）$E + A$　（C）$2E - A$　（D）$2E + A$

解：根据第 2 章房间 201 的大总结可知，这道题的问题可以转化为：$|E - A|$、$|E + A|$、$|2E - A|$、$|2E + A|$ 这四个行列式中的哪个不为零。所以我们只需要算出这四个行列式就可以了。至于如何算这四个行列式，和上道题的方法是一样的。具体来说，就是利用特征值来计算。

（A）选项：设矩阵 $E - A$ 的三个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。

$\lambda_1 = 1 - 1 = 0$、$\lambda_2 = 1 - (-1) = 2$、$\lambda_3 = 1 - 2 = -1$

$|E - A| = 0\times 2\times(-1) = 0$

（B）选项：设矩阵 $E + A$ 的三个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。

$\lambda_1 = 1 + 1 = 2$、$\lambda_2 = 1 + (-1) = 0$、$\lambda_3 = 1 + 2 = 3$

$|E + A| = 2\times 0\times 3 = 0$

（C）选项：设矩阵 $2E - A$ 的三个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。

$\lambda_1 = 2 - 1 = 1$、$\lambda_2 = 2 - (-1) = 3$、$\lambda_3 = 2 - 2 = 0$

$|2E - A| = 1\times 3\times 0 = 0$

（D）选项：设矩阵 $2E + A$ 的三个特征值为 λ_1、λ_2、λ_3。

$\lambda_1 = 2+1=3$、$\lambda_2 = 2+(-1)=1$、$\lambda_3 = 2+2=4$

$|2E+A| = 3\times1\times4 = 12 \neq 0$

答案：（D）

考研题 5.10 设 A 是三阶矩阵，$\lambda_1=1$、$\lambda_2=2$、$\lambda_3=3$ 是 A 的特征值，对应的特征向量分别是 $\vec{\xi}_1=(2,2,-1)^{\mathrm{T}}$、$\vec{\xi}_2=(-1,2,2)^{\mathrm{T}}$、$\vec{\xi}_3=(2,-1,2)^{\mathrm{T}}$，又 $\vec{b}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，计算：（1）$A^n\vec{\xi}_1$、（2）$A^n\vec{b}$。

解：（1）由于 λ_1 是 A 的特征值，$\vec{\xi}_1$ 是 A 对应于 λ_1 的特征向量，由本节所讲的知识点可知，矩阵 A^n 有特征值 $\lambda_1{}^n$，且 $\vec{\xi}_1$ 是矩阵 A^n 对应于特征值 $\lambda_1{}^n$ 的无数个特征向量中的一个。好，根据特征值、特征向量的定义式有：

$$A^n\vec{\xi}_1 = \lambda_1{}^n\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_1 \text{（因为 } \lambda_1 = 1\text{、}1^n = 1\text{）}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

（2）令 $\vec{b}=x_1\vec{\xi}_1+x_2\vec{\xi}_2+x_3\vec{\xi}_3$。解此齐次方程组，发现此方程组有唯一解 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=1$，$x_3=\frac{2}{3}$。所以 $\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2+\frac{2}{3}\vec{\xi}_3$。

所以 $A^n\vec{b}=A^n\left(\frac{1}{3}\vec{\xi}_1+\vec{\xi}_2+\frac{2}{3}\vec{\xi}_3\right)$

$$=\frac{1}{3}A^n\vec{\xi}_1+A^n\vec{\xi}_2+\frac{2}{3}A^n\vec{\xi}_3$$

$$=\frac{1}{3}\lambda_1{}^n\vec{\xi}_1+\lambda_2{}^n\vec{\xi}_2+\frac{2}{3}\lambda_3{}^n\vec{\xi}_3$$

【第（1）问看明白了的话，这一步应该很好理解】

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}+2\cdot3^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-2^n+2^2\cdot 3^{n-1} \\ \frac{2}{3}+2^{n+1}-2\cdot 3^{n-1} \\ -\frac{1}{3}+2^{n+1}+2^2\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

考研题 5.11　A满足关系式 $A^2-2A+E=\mathrm{O}$，则A的特征值的取值范围是______。

解：令 $B=A^2-2A+E$，设A的特征值为λ（λ代表矩阵A的 n 个特征值中的任意一个），则矩阵B的特征值为$\lambda^2-2\lambda+1$，而题中说了，矩阵B为零矩阵，零矩阵的所有特征值都为零，这一点大家一定要牢记。所以矩阵B的所有特征值都为 0，所以$\lambda^2-2\lambda+1=0$，解得$\lambda=1$。

5.12　房间 505——什么样的方阵可以对角化

在本章的第六车砖中，我给大家介绍了对角化的概念。若 $P^{-1}AP=\Lambda$，则称方阵A相似于对角矩阵Λ，也称方阵A可以对角化。但是，并不是任意的一个方阵A，就一定可以对角化。**本节我们要研究的是“什么样的方阵可以对角化”，下一节我们要研究的是“若方阵可以对角化，那么P以及Λ该怎么求。”**

判断 $A_{n\times n}$ 是否可以对角化的步骤如下：

第一步：看A是否有 n 个互不相同的特征值。若有 n 个互不相同的特征值，则A可以对角化；否则，进行下一步；

第二步：只关注A的 r（r>1）重根特征值。若其所对应的特征向量的最大无关组中含有 r 个向量，则A可以对角化，否则，A不能对角化。

例. 本章的考研题 5.1 中所给的矩阵A是否可以对角化？

解：本章的考研题 5.1 中所给的矩阵是一个三阶矩阵（三行三列的矩阵），所以矩阵A有三个特征值，这是毫无疑问的。现在我们就用刚刚讲的方法来判断一下矩阵A是否可以对角化。

首先，我们进行第一步，看看矩阵A的三个特征值是否互不相同。矩阵A的三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$、$\lambda_3=-2$。由此可知，矩阵A的三个特征值并非互不相同（有两个特征值相同，都是 0），所以此时无法判断矩阵A是否可以对角化，需要进行第二步。

记住，第二步只需要关注 r（r>1）重根特征值所对应的特征向量的最大无关组中所含的向量的个数是否为 r 就可以了，而不需要关注一重根（单根）特征值。此题中，0 是二重根特征值，−2 是一重根（单根）特征值，所以我们只需要关注二重根特征值（即 0）所

对应的特征向量的最大无关组中所含的向量的个数是否为 2 就可以了。特征值 0 所对应的所有特征向量为：

$$k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}，其中 k_1、k_2 是不同时为零的任意常数。$$

由此可知，特征值 0 所对应的这无数个特征向量所组成的向量组的最大无关组中含两个向量，所以矩阵 A 可以对角化。

例. 矩阵 A 是三阶矩阵，它的三个特征值分别为 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=-2$、$\lambda_3=4$ 。矩阵 A 是否可以对角化？

解：本题所给的矩阵 A 为三阶矩阵，所以矩阵 A 肯定有三个特征值，这是毫无疑问的。

和上道题一样，我们用刚刚讲的方法来判断一下矩阵 A 是否可以对角化。

我们现在进行第一步，看看矩阵 A 的三个特征值是否互不相同。矩阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=-2$、$\lambda_3=4$ 。由此可知，矩阵 A 的三个特征值是互不相同的，所以根本不用再进行第二步了，我们现在就可以断定矩阵 A 一定可以对角化。

考研题 5.12 下列矩阵中能相似于对角矩阵的是：_______。

（A）$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

解：我们仔细观察一下这四个选项所给的矩阵，很容易发现这样一件事：这四个矩阵都是上三角矩阵（对角线下方都是 0）。

好，由房间 502 的结论 3（对角矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵这三种特殊矩阵的特征值就是对角线上的元素）可知，这四个矩阵具有相同的特征值，即（A）、（B）、（C）、（D）选项中所给的矩阵的特征值都为 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 、 $\lambda_3=2$ 。

好，现在我们来看此题的问题。此题的问题问的是“下列矩阵中能相似于对角矩阵的是”。我早就讲过，“相似于对角矩阵”与“对角化”是一个意思，所以此题的问题可以改为“下列矩阵中能对角化的是”。所以我们要按照之前讲的判断某矩阵是否可以对角化的两个步骤来做此题。

（A）选项

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

第一步：由于该矩阵的三个特征值并非互不相同（$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$），所以进行第二步，只关注特征值1。

第二步：我们不需要把$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的特征向量求出来（当然也可以那样做），那样做就做复杂了。我们只需要计算出$r(A-E)$，然后用$3-r(A-E)$即可。$3-r(A-E)$就是特征值1所对应的特征向量的最大无关组中所含向量的个数。这是为什么呢？我现在来解释一下。

大家知道，求特征值1所对应的特征向量的方法就是解齐次方程组$(A-E)\vec{\xi}=\vec{0}$，这个齐次方程组的基础解系中含几个向量，特征值1所对应的特征向量的最大无关组中就含几个向量。而早在第3章的房间302中我就给大家讲过，齐次方程组$A\vec{X}=\vec{0}$的基础解系中含的向量个数是$n-r(A)$，那么齐次方程组$(A-E)\vec{\xi}=\vec{0}$的基础解系中含的向量个数不就是$n-r(A-E)$嘛，明白了吧。（B）、（C）、（D）选项也是一样的。

$$A-E=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(A-E)=2$，$3-r(A-E)=3-2=1$

由此可知，$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的特征向量的最大无关组中含一个向量，而特征值1是二重根特征值，$1\neq 2$，所以（A）选项所给的矩阵不能对角化。

（B）选项

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

第一步：由于该矩阵的三个特征值并非互不相同（$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$），所以进行第二步，只关注特征值 1。

第二步：计算 $3-r(B-E)$。

$$B-E=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r(B-E)=2$，$3-r(B-E)=3-2=1$

由此可知，$\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应的特征向量的最大无关组中含一个向量，而特征值 1 是二重根特征值，$1\neq 2$，所以（B）选项所给的矩阵不能对角化。

（C）选项

$$C=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

第一步：由于该矩阵的三个特征值并非互不相同（$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$），所以进行第二步，只关注特征值 1。

第二步：计算 $3-r(C-E)$。

$$C-E=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(C-E)=1$，$3-r(C-E)=3-1=2$

由此可知，$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的特征向量的最大无关组中含两个向量，而特征值 1 也是二重根特征值，$2=2$，所以（C）选项所给的矩阵可以对角化。

（D）选项

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

第一步：由于该矩阵的三个特征值并非互不相同（$\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=2$），所以进行第二步，只关注特征值 1。

第二步：计算$3-r(D-E)$。

$$D-E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(D-E)=2$，$3-r(D-E)=3-2=1$

由此可知，$\lambda_1=\lambda_2=1$所对应的特征向量的最大无关组中含一个向量，而特征值 1 是二重根特征值，$1\neq 2$，所以（D）选项所给的矩阵不能对角化。

答案：（C）。

5.13　房间 506——若方阵可以对角化，那么Λ以及P 怎么求

本节所要研究的问题是建立在上一节所研究的问题的基础上的。具体来说，上一节所研究的问题是“什么样的方阵可以对角化”，而本节所要研究的问题是“若方阵可以对角化（即存在对角矩阵Λ，存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\Lambda$），Λ和P到底应该如何去求”。

我先来说一下对角矩阵Λ应该如何去求。对角矩阵Λ除对角线以外的数都是 0，这是毫无疑问的，所以讨论“对角矩阵Λ应该如何去求”实际上就是讨论“对角矩阵Λ对角线上的数是多少”。那我现在就告诉大家：**Λ的对角线上的 n 个数就是方阵A的 n 个特征值（无论这 n 个特征值中有没有相同的特征值）**。另外，强调一点：**方阵A的 n 个特征值在对角矩阵Λ的对角线上的位置是可以随便换的，因此对角矩阵Λ并不唯一。**

例. 三阶矩阵A有三个不同的特征值$\lambda_1=1$、$\lambda_2=2$、$\lambda_3=4$。

（1）A可以对角化吗（A可以相似于对角矩阵吗）？

（2）若可以，请写出对角矩阵Λ。

解：

（1）由于A的三个特征值互不相同，根据上一节所讲的知识，方阵A可以对角化。

（2）根据刚刚讲的知识，对角矩阵Λ可以是如下矩阵。

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}、\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}、\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}、\Lambda=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}、\Lambda=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

例. A为三阶矩阵，$\lambda_1=\lambda_2=2$、$\lambda_3=3$，特征值 2 所对应的无数个特征向量中可以找出两个线性无关的特征向量。

（1）A可以对角化吗（A可以相似于对角矩阵吗）？

（2）若可以，请写出对角矩阵Λ。

解：

（1）特征值 2 所对应的特征向量中可以找出两个线性无关的特征向量，这说明特征值 2 所对应的特征向量的最大无关组中包含向量的个数是大于等于 2 的。又因为特征值 2 是二重根特征值，r 重根特征值所对应的特征向量的最大无关组中包含向量的个数是绝不可能大于 r 的（这个知识点如果你以前不知道的话，现在一定要记下来，因为这个知识点很重要）。所以，此题特征值 2 所对应的特征向量的最大无关组中必包含两个向量。

因为 2=2，所以 A 可以对角化。

（2）根据刚刚讲的知识，对角矩阵 Λ 可以是如下矩阵。

$$\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}、\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}、\Lambda=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

现在该跟大家说说可逆矩阵 P 应该如何去求了。首先，先来和大家说一个重要的知识点：由于 Λ 不唯一，而 P 与 Λ 是有关系的，所以 P 也不唯一。

好，现在正式说 P 的求法：矩阵 P 的第 i 列是 Λ 中处于 a_{ii} 位置的特征值所对应的特征向量。

例. A 为三阶矩阵，它有三个不同的特征值 $\lambda_1=-2$、$\lambda_2=8$、$\lambda_3=9$。λ_1 所对应的特征向量是 $k\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$，λ_2 所对应的特征向量是 $k\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$，λ_3 所对应的特征向量是 $k\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$。

（1）A 可以对角化吗？

（2）若可以，请求出 P 和 Λ。

解：

（1）由于 A 的三个特征值互不相同，根据上一节所讲的知识，A 可以对角化。

（2）我们已经知道矩阵 A 可以对角化了，也就是说，存在 P 和 Λ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。现在我们要把 P 和 Λ 求出来。

①当$\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&8&0\\0&0&9\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&2\\5&8&8\end{pmatrix}$、$P_2=\begin{pmatrix}2&2&1\\4&5&2\\10&8&8\end{pmatrix}$、$P_3=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&10&6\\5&16&24\end{pmatrix}$等等。

看见了吧，P 有多种情况，但无论哪一种情况，P 的第一列一定是特征值-2 所对应的特征向量，P 的第二列一定是特征值 8 所对应的特征向量，P 的第三列一定是特征值 9 所对应的特征向量。

②当$\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&9&0\\0&0&8\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&5\\5&8&8\end{pmatrix}$、$P_2=\begin{pmatrix}2&4&4\\4&8&10\\10&32&16\end{pmatrix}$、$P_3=\begin{pmatrix}1&1&8\\2&2&20\\5&8&32\end{pmatrix}$等等。

P 有多种情况。但无论哪一种情况，P 的第一列一定是特征值-2 所对应的特征向量，P 的第二列一定是特征值 9 所对应的特征向量，P 的第三列一定是特征值 8 所对应的特征向量。

③当$\Lambda=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&-2&0\\0&0&8\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&5\\8&5&8\end{pmatrix}$、$P_2=\begin{pmatrix}2&1&2\\4&2&5\\16&5&8\end{pmatrix}$、$P_3=\begin{pmatrix}2&2&4\\4&4&10\\16&10&16\end{pmatrix}$等等。

P 有多种情况。但无论哪一种情况，P 的第一列一定是特征值 9 所对应的特征向量，P 的第二列一定是特征值-2 所对应的特征向量，P 的第三列一定是特征值 8 所对应的特征向量。

④当$\Lambda=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&8&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&5&2\\8&8&5\end{pmatrix}$、$P_2=\begin{pmatrix}2&4&1\\4&10&2\\16&16&5\end{pmatrix}$、$P_3=\begin{pmatrix}1&4&1\\2&10&2\\8&16&5\end{pmatrix}$等等。$P$ 有多种情况，但无论哪一种情况，P 的第一列一定是特征值 9 所对应的特征向量，P 的第二列一定是特征值 8 所对应的特征向量，P 的第三列一定是特征值-2 所对应的特征向量。

⑤当$\Lambda=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&9&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}2&1&1\\5&2&2\\8&8&5\end{pmatrix}$、$P_2=\begin{pmatrix}4&1&1\\10&2&2\\16&8&5\end{pmatrix}$、$P_3=\begin{pmatrix}4&2&1\\10&4&2\\16&16&5\end{pmatrix}$等等。$P$ 有多种情况，但无论哪一种情况，P 的第一列一定是特征值 8 所对应的特征向量，P 的第二列一定是特征值 9 所对应的特征向量，P 的第三列一定是特征值-2 所对应的特征向量。

⑥当$\Lambda=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&-2&0\\0&0&9\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}2&1&1\\5&2&2\\8&5&8\end{pmatrix}$、$P_2=\begin{pmatrix}4&1&1\\10&2&2\\16&5&8\end{pmatrix}$、$P_3=\begin{pmatrix}2&1&2\\5&2&4\\8&5&16\end{pmatrix}$等等。$P$ 有多种情况，但无论哪一种情况，P 的第一列一定是特征值 8 所对应的特征向量，P 的第

二列一定是特征值-2所对应的特征向量，P的第三列一定是特征值9所对应的特征向量。

可逆矩阵P的求法还没完全讲完，还有一种情况没讲。若矩阵A有**r**（**r>1**）重根特征值，记此**r**重根特征值为λ。根据之前讲的内容，我们可以知道对角矩阵的对角线上有**r**个Λ，那么P中自然也是有**r**列都是特征值λ所对应的特征向量。现在我要告诉大家的是：这**r**列必须是线性无关的。

例. 三阶矩阵A的三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=-2$。特征值$\lambda_1=\lambda_2=0$所对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，其中$k_1$、$k_2$不同时为0。特征值$\lambda_3=-2$所对应的特征向量为：

$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}(k\neq0)$。

（1）矩阵A可以对角化吗？

（2）若可以，请求出P和Λ，使得$P^{-1}AP=\Lambda$。

解：

（1）A有二重根特征值0，特征值0所对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，由此可知特征值0所对应的特征向量的最大无关组中含两个向量。2=2，根据上一节所讲的知识，A可以对角化。

（2）①当$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&1&4\\1&0&-2\end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$等等。$P$有多种情况，但无论哪一种情况，$P$的第一列和第二列一定是特征值0所对应的特征向量，且这两列是线性无关的，P的第三列一定是特征值-2所对应的特征向量。下面我分别对上述三个P进行解释。

对$P_1=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$的解释：$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$是$k_1=1$、$k_2=0$时的情况，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$是$k_1=0$、$k_2=1$时的情况，所以这两列都是特征值0所对应的特征向量。又因为这两个列向量不成比例，我

早就给大家总结过，两个不成比例的向量是线性无关的，所以$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$是线性无关的。

综上所述，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$既是特征值 0 所对应的特征向量，又是线性无关的，因此可以作为矩阵 P 的第一列和第二列。而$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$是 $k=1$ 时的情况，所以$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$是特征值−2 所对应的特征向量，因此可以作为矩阵 P 的第三列。

对 $P_2=\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&1&4\\1&0&-2\end{pmatrix}$的解释：第一列、第二列与刚才的 P_1 的第一列、第二列一样，就不用解释了。而$\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$是 $k=2$ 时的情况，所以$\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$是特征值−2 所对应的特征向量，因此可以作为矩阵 P 的第三列。

对 $P_3=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$的解释：$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$是 $k_1=1$、$k_2=0$ 时的情况，$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$是 $k_1=0$，$k_2=2$ 时的情况，所以这两列都是特征值 0 所对应的特征向量。又因为这两个列向量不成比例，所以$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$是线性无关的。综上所述，$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$既是特征值 0 所对应的特征向量，又是线性无关的，因此可以作为矩阵 P 的第一列和第二列。而$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$是 $k=1$ 时的情况，所以

$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$是特征值-2 所对应的特征向量，因此可以作为矩阵$P$的第三列。

下面我来说一个错误的P，$P=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$，为什么错误呢？别急，听我讲。$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$是$k_1=0$、$k_2=1$时的情况，$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$是$k_1=0$、$k_2=2$时的情况，所以这两列都是特征值 0 所对应的特征向量。但是，这两个向量成比例，$2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$。由第 3 章房间 301 可知，若一个向量组中包含有成比例的向量，则该向量组线性相关。所以向量组$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$是线性相关的。综上所述，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$虽然都是特征值 0 所对应的特征向量，但是它们是线性相关的，所以它们不能作为矩阵 P 的第一列和第二列。

②当$\Lambda=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$等等。$P$有多种情况，但无论哪一种情况，$P$的第一列一定是特征值$-2$所对应的特征向量，$P$的第二列和第三列一定是特征值 0 所对应的特征向量，且这两列是线性无关的。

③当$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$等等。$P$有多种情况，但无论哪一种情况，$P$的第一列和第三列一定是特征值 0 所对应的特征向量，且这两列是线性无关的，P的第二列一定是特征值-2所对应的特征向量。

当一个方阵可以对角化时，对角矩阵 Λ 以及可逆矩阵 P 的求法已经都讲完了，下面我们来看一道考研题。

考研题 5.13 设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$，$f(x)=x^3-2x+5$，问 $B=f(A)$ 能否相似于对角阵。若能，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}BP=\Lambda$。

解：矩阵 A 是四阶方阵，肯定有四个特征值。现在，我们就来求一下矩阵 A 的四个特征值以及相应的特征向量。

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda&-1&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1&-1\\-1&-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&-1&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1&-1\\-1&1-\lambda&-1&-1\\-1&-1&1-\lambda&-1\\-1&-1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $|A-\lambda E|=0$，即：

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

解得：$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$。

当 $\lambda_1=-2$ 时，用本章第二车砖所讲的方法计算出的特征向量为：$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k\neq 0$。

当 $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$ 时，用本章第二车砖所讲的方法计算出的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k_1$、$k_2$、$k_3$ 不同时为 0。

由于 $f(x)=x^3-2x+5$，所以 $f(A)=A^3-2A+5E$。又因为 $B=f(A)$，所以 $B=A^3-2A+5E$。根据房间 504 中所讲的知识可知，四阶矩阵 B 的四个特征值分别为 $f(\lambda_1)$、$f(\lambda_2)$、$f(\lambda_3)$、$f(\lambda_4)$。

$$f(\lambda_1)=f(-2)=-8+4+5=1$$

$$f(\lambda_2)=f(\lambda_3)=f(\lambda_4)=f(2)=8-4+5=9$$

所以矩阵 B 的四个特征值为 $f(\lambda_1)=1$，$f(\lambda_2)=f(\lambda_3)=f(\lambda_4)=9$

仍然由房间 504 中所讲的知识可知：$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为矩阵 B 对应于特征值 1 的特征向量，

$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$为矩阵$B$对应于特征值 9 的特征向量。由此可知，矩阵$B$有三重根特征值 9，此特征值对应的特征向量的最大无关组中含三个向量，3=3，所以矩阵B可以对角化（B可以相似于对角矩阵）。

根据本节所讲知识，有如下结论：

①当$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&-1&0\\1&-1&0&0\\1&0&0&-1\end{pmatrix}$等。

②当$\Lambda=\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&0\\-1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$等。

③当$\Lambda=\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&1&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$等。

④当$\Lambda=\begin{pmatrix}9&0&0&0\\0&9&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&1\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$等。

5.14　房间 507——关于相似矩阵的五个小结论

矩阵A、矩阵B都是 n 阶矩阵，若$A\sim B$，则有如下五个结论成立：

①$kA\sim kB$（k为任意常数）

②$A^2\sim B^2$

③$A^k\sim B^k$（k为正整数）

④$f(A)\sim f(B)$，其中$f(x)$是关于 **x** 的多项式

⑤$A^T\sim B^T$

5.15　房间 508——实对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交

先来看看什么叫实对称矩阵。对称矩阵大家还记得吧，若方阵A满足$A^T=A$，则称方阵A为对称矩阵。

例. $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&7&5\\4&5&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&5&7\\5&4&6\\7&6&9\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}8&5&6\\5&4&3\\6&3&11\end{pmatrix}$都是对称矩阵。

实对称矩阵的定义是：若方阵A为对称矩阵，且方阵A中的每一个数都为实数，则称方阵A为是对称矩阵。很简单吧。

上例中的矩阵A、矩阵B、矩阵C都是实对称矩阵。其实对于实对称矩阵中的“实”字，我们并不用关注太多，因为考研数学线性代数部分的题中所给的对称矩阵，都是实对称矩阵。

再来复习一下两个向量正交的概念。**若两个维数相同的行向量（或列向量）内积为 0，则称这两个向量正交。**

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$、$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\10\\-8\end{pmatrix}$，问$\vec{a}$、$\vec{b}$是否正交？

解：计算$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积即可。

$\left(\vec{a}，\vec{b}\right)=1\times4+2\times10+3\times(-8)=0$

由于$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积为 0，所以$\vec{a}$、$\vec{b}$正交。

例. $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$，问$\vec{a}$、$\vec{b}$是否正交？

解：计算$\vec{a}$，$\vec{b}$的内积即可。

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1\times4+2\times5+3\times6=32$$

由于$\vec{a}$、$\vec{b}$的内积不为 0，所以$\vec{a}$、$\vec{b}$不正交。

好，有了前面的铺垫，现在我们进入到本节要讲的重点中。本节的标题是：**实对称阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交。**

这句话一点儿不难理解，但是为了让大家能够深入理解这句话，我还是要给大家来分析一下。同学们还记得本章第二车砖中的最后一句话是什么吗？我给大家提个醒：**对于至少存在两个不同特征值的任意矩阵 A 来说，矩阵 A 的两个来自于不同特征值的特征向量必线性无关。**好，现在我们把本章第二车砖中的最后一句话与本节的标题对比一下，立刻可以把本节的标题翻译为：**对于实对称矩阵 A 来说，两个来自于不同特征值的特征向量不仅是线性无关的，而且还是正交的（正交必线性无关，线性无关是正交的前提，大家可以把线性无关理解成“不平行”，而把正交理解成“垂直”，垂直肯定是不平行，所以两个向量正交肯定能推出两个向量线性无关）**。明白了吧，这就叫温故而知新。

例.矩阵 A 为三阶实对称阵，它的三个特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$、$\lambda_3=-2$。特征值 $\lambda_3=-2$ 对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，其中 a、b、c 都是特定的常数，k 是不等于 0 的常数；特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$，其中 d、e、f、h、i、j 都是特定的常数，k_1、k_2 是不同时为 0 的常数。试证：$(2d+g)a+(2e+h)b+(2f+i)c=0$。

解：由于 $k_1\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$ 是特征值 1 所对应的全体特征向量，所以 $\begin{pmatrix}2d+g\\2e+h\\2f+i\end{pmatrix}$ 为特征值 1 所对应的特征向量（$k_1=2$ 、$k_2=1$）；由于 $k\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 是特征值 -2 所对应的全体特征向量，所以 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 是特征值 -2 所对应的特征向量（k=1）。

由于矩阵 A 为实对称矩阵（题中说的），实对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交，所以有 $\begin{pmatrix}2d+g\\2e+h\\2f+i\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ 正交。即：$(2d+g)a+(2e+h)b+(2f+i)c=0$ 。

5.16　房间 509——

实对称矩阵一定可以相似于对角矩阵

在本章的房间 505 中，我告诉了大家判断某矩阵是否可以对角化的两个步骤。**而现在我要告诉大家的是：对于实对称矩阵来说，实对称矩阵是一定可以对角化的，根本就不需要用那两个步骤去判断。**

好，那么我们现在继续讲。**实对称矩阵一定可以对角化的意思是：对于任意实对称矩阵 A 来说，一定存在对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 。那么在矩阵 A 为实对称矩阵的情况下，我们该如何去求上述对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P 呢？有两种方法可以使用。**

方法 1：就按照本章房间 506 中所讲的方法去求解对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P 即可。即：对角矩阵 Λ 的对角线上的数为矩阵 A 的特征值（当然，由于矩阵 A 的特征值在对角线上的排列顺序可以不同，所以 Λ 不唯一）；可逆矩阵 P 的第 i 列是 Λ 中处于 a_{ii} 位置的特征值所对应的特征向量【若矩阵 A 有 r（r>1）重根特征值 λ，则 P 中对应于特征值 λ 的 r 列特征向量必须线性无关】。求出的 Λ 、P 肯定满足 $P^{-1}AP=\Lambda$ 。

方法 2：对角矩阵 Λ 的求法同上。可逆矩阵 P 的求法：基于某个对角矩阵 Λ，按照方法 1 求出的矩阵 P 在方法 2 中记为矩阵 Q。我们将矩阵 Q 的列向量组单位正交化，单位正交化后得到的就是最终结果，即矩阵 P。就是说，按照方法 2 求可逆矩阵 P 比按照方法 1 求可逆矩阵 P 多一步“单位正交化”。然而，多劳多得嘛，付出总有回报，按照方法 2 求得的矩阵 P 满足 $P^{-1}=P^T$。也就是说，按照方法 2 求得的矩阵 P 是正交矩阵，这是按照方法 1 求得的矩阵 P 所比不了的（尽管按照两种方法求得的矩阵 P 均满足 $P^{-1}AP=\Lambda$）。

注意，**所有能对角化的方阵都可以用方法 1 来求对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P，而只有对称矩阵才可以用方法 2 来求对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P。**

考研题 5.14　已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是对角阵。

解：$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$、$A^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，由于 $A^T=A$，所以矩阵 A 为对称矩阵，所以矩阵 A 一定可以对角化，即：一定存在矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。根据刚刚讲的知识点，我们有两种方法可以求出矩阵 P。但是无论用哪种方法，我们都需要先求出矩阵 A 的特征值以及每个不同特征值所对应的特征向量。

先求矩阵 A 的特征值。

$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(3-\lambda)\times\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(3-\lambda)\times\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}\\&=(3-\lambda)\times\begin{vmatrix}-\lambda&0\\0&-\lambda\end{vmatrix}\\&=(3-\lambda)\times\lambda^2\\&=0\end{aligned}$$

解得：$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=3$。

再求每个不同特征值所对应的特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时：

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(A-0E)\vec{\xi}=\vec{0}$，即 $A\vec{\xi}=\vec{0}$。求 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 所对应的特征向量的方法就是解此齐次方程组。就用第 3 章房间 302 所讲的方法去求解即可，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$r=1$， $r<n$，说明此齐次方程组有无穷多解。

$x_1+x_2+x_3=0$，因为 $n-r=3-1=2$，所以取 $r<n$，解得 x_1；取 $\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$，解得 $x_1=1$。

所以此方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$。

所以此方程组的通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是任意常数。

所以特征值 0 所对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是不同时为 0 的任意常数。

当 $\lambda_3=3$ 时：

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(A-3E)\vec{\xi}=\vec{0}$。求 $\lambda_3=3$ 所对应的特征向量的方法就是解此齐次方程组。就用第 3 章房间 302 所讲的方法去求解即可，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$r=2$，$r<n$，说明此齐次方程组有无穷多解。

$\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ \quad x_2-x_3=0\end{cases}$，因为 $n-r=3-2=1$，所以取 $x_2=1$，解得 x_1、$x_3=1$。

所以此方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。

所以此方程组的通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 是任意常数。

所以特征值 3 所对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k 是不为 0 的常数。

好，矩阵 A 的特征值以及每个不同特征值所对应的特征向量我们都已经求完了。接下来，我们该求使等式 $P^{-1}AP=\Lambda$ 成立的可逆矩阵 P 了。

根据本节所讲，我们有两种方法可以求出可逆矩阵 P。

利用本节所讲的方法 1 来求可逆矩阵 P。

①当 $\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$等。

②当 $\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}$等。

③当 $\Lambda=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$等。

注意，我写出了三种对角矩阵 Λ，而且对于同一个对角矩阵 Λ，我又写出了不止一种 P。实际上，只要能写出一种对角矩阵 Λ，然后针对该 Λ 写出一种 P，此题就算是做完了。

利用本节所讲的方法 2 来求可逆矩阵 P（只有对称矩阵才能用此方法来求 P）。

①当 $\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$时，$Q_1=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$Q_2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$等。

Q_1 对应的 P_1 的求法如下。

记 Q_1 的第一列为向量 $\vec{a}_1$，记 Q_1 的第二列为向量 $\vec{a}_2$，记 Q_3 的第三列为向量 $\vec{a}_3$，则 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$、$\vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$、$\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$。根据之前的讲解，我们现在需要把 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$ 这三个向量单位正交化。所谓单位正交化，指的是“先正交化，后单位化”，这我在第 3 章的房间 307 中就讲过。好，那么我们就先将这三个向量正交化。

正交化的过程如下：

由于 $\vec{a}_3$ 是特征值 3 所对应的特征向量，而 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 是特征值 0 所对应的特征向量，而本题所给的矩阵 A 又是实对称矩阵，我在房间 508 中讲述过，实对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交。由此可知，$\vec{a}_3$ 与 $\vec{a}_1$ 正交，$\vec{a}_3$ 与 $\vec{a}_2$ 正交。因此，“将 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、

$\vec{a}_3$ 正交化”可以变为“将 $\vec{a}_1$ 、$\vec{a}_2$ 正交化”，这样一来计算量就小了（当然，也可以不简化）。好，现在我们利用第 3 章房间 307 中所讲的“施密特正交法”将 $\vec{a}_1$ 、$\vec{a}_2$ 正交化。

取 $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\left(\vec{a}_2, \vec{b}_1\right)}{\left(\vec{b}_1, \vec{b}_1\right)} \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

好，现在 $\vec{b}_1$ 、$\vec{b}_2$ 、$\vec{a}_3$ 即为 $\vec{a}_1$ 、$\vec{a}_2$ 、$\vec{a}_3$ 正交化后的向量。然后我们再对 $\vec{b}_1$ 、$\vec{b}_2$ 、$\vec{a}_3$ 进行“单位化”。

单位化的过程如下：

$$\vec{c}_1 = \frac{\vec{b}_1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

好，现在“单位化”也完成了。$\vec{c}_1$、$\vec{c}_2$、$\vec{c}_3$ 即为 $\vec{b}_1$ 、$\vec{b}_2$ 、$\vec{a}_3$ 单位化后的向量。

所以Q_1对应的P_1为：$P_1=\begin{pmatrix}\vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

同理可得Q_2对应的P_2为：$P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

综上所述：

①$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$等。

②当$\Lambda=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ $P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$等。

③$\Lambda=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$时，$P_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ $P_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$等。

这道题做完了。大家一定要注意，用方法 2 求出的矩阵P必为正交矩阵。换言之，用方法 2 求出的矩阵P必满足$P^T=P^{-1}$。

考研题 5.15　已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，求正交阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 Λ 是对角阵。

解：我之所以把此题写在这里，就是为了和上一道题对比。此题与上一道题唯一的区别就在于：**此题明确说明 P 是正交阵，而上一道题让求的 P 则没有此要求。所以，此题在求完特征值以及不同特征值所对应的特征向量后，只能用方法 2 去求矩阵 P，而不能用方法 1。**

考研题 5.16　设 A 是三阶实对称矩阵，$\lambda_1=-1$、$\lambda_2=\lambda_3=1$ 是 A 的特征值，$\lambda_1=-1$ 所对应的特征向量为 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，求矩阵 A。

解：由于 A 是实对称矩阵，所以 A 必能对角化。即：必存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ 使得：

$P^{-1}AP=\Lambda$　　①式

在①式的等式两侧左乘矩阵 $\boldsymbol{P}$，得：

$PP^{-1}AP=P\Lambda$　　②式

由于 $PP^{-1}=E$，所以②式可以变为：

$EAP=P\Lambda$　　③式

由于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 乘以任何矩阵等于该矩阵，所以③式可以变为：

$AP=P\Lambda$　　④式

在④式的等式两侧右乘矩阵 P^{-1}，得：

$APP^{-1}=P\Lambda P^{-1}$　　⑤式

由于矩阵乘法满足结合律，所以⑤式可以变为：

$A(PP^{-1})=P\Lambda P^{-1}$　　⑥式

由于 $PP^{-1}=E$，所以⑥式可以变为：

$AE=P\Lambda P^{-1}$　　⑦式

由于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 乘以任何矩阵都等于该矩阵，所以⑦式可以变为：

$A = P\Lambda P^{-1}$ ⑧式

此题让求矩阵 A，根据⑧式，$A = P\Lambda P^{-1}$。所以我们只要求出对角矩阵 Λ、对角矩阵 Λ 所对应的矩阵 P 以及 P^{-1} 就可以了。

由之前讲的内容可知，Λ 可以是 $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 三种中的一种。我们不妨取 $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，现在来求一下这个对角矩阵所对应的可逆矩阵 P，我们就选用方法 1 来求 P 吧，这样就不用单位正交化了。

设 $P = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$，其中 $\vec{a}_1$ 为特征值−1 所对应的特征向量。$\vec{a}_2, \vec{a}_3$ 为特征值 1 所对应的特征向量且线性无关。题中所给的 $\vec{\xi}_1$ 就可以作为 $\vec{a}_1$，但 $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ 我们还不知道，我们需要求出 $\vec{a}_2, \vec{a}_3$。

设 $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，由于实对称阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交，所以 $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ 正交。所以有：$x_1 \times 0 + x_2 \times 1 + x_3 \times 1 = 0$。我们现在只要取满足此关系的任意 x_1, x_2, x_3 就行，这里取的是 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$。所以 $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$。

设 $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$，同理有 $x_4 \times 0 + x_5 \times 1 + x_6 \times 1 = 0$。这里取 $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = -1$，所以 $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

好了，现在 $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ 都有了，且 $\vec{a}_2, \vec{a}_3$ 不成比例，所以它们是线性无关的。因此，它们可

以作为矩阵 P 的第二列和第三列。

现在 P 和 Λ 都有了，即 $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$，就还差一个 P^{-1}。第 1 章我就讲过逆矩阵的求法，在这里就不再赘述了。

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

所以 $A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\ 0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

5.17　房间 510——实对称矩阵一定可以合同于对角矩阵

在上一节中，我告诉了大家**实对称矩阵一定可以相似于对角矩阵**。即：若方阵 A 为实对称阵，则一定存在对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

现在我要告诉大家的是，**实对称矩阵也一定可以合同于对角矩阵**。即：若 A 为实对称矩阵，则一定存在对角矩阵 Λ 和可逆矩阵 P，使得 $P^TAP=\Lambda$。那么，$P^TAP=\Lambda$ 中的可逆矩阵 P 以及对角矩阵 Λ 该如何去求呢？有两种方法。

方法 1：与房间 509 中所讲的方法 2 完全一样，一个字都不差。这是为什么呢？因为我在讲房间 509 的方法 2 时就告诉过大家：按此方法求出的 P 满足 $P^{-1}=P^T$。所以，按照房间 509 的方法 2 求出 Λ 和 P，会同时满足 $P^TAP=\Lambda$ 和 $P^{-1}AP=\Lambda$。

方法 2：用配方法求 Λ 和 P。

下面我就通过举例的方式来讲一下配方法的步骤。

考研题 5.17　矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&5\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使得 $P^TAP=\Lambda$。

解：由于 $A^T=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&5\end{pmatrix}$，所以 $A^T=A$，因此矩阵 A 为对称阵。又由于矩阵 A 中的九个数都是实数，所以矩阵 A 为实对称矩阵。由于实对称矩阵一定可以合同于对角矩阵，所以对于此题的矩阵 A 来说，一定存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ，使得 $P^TAP=\Lambda$。看，此题的问题就是让大家求出 Λ 和 P，我们用方法 2（配方法）来求。

首先，我们先将矩阵 A 写为相应的多项式。

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_xx_3$$

同学们，你们一定很奇怪为什么矩阵 A 的多项式是这样的。别急，听我解释。**因为矩阵 A 中的 a_{11},a_{22},a_{33} 位置的数字是 1、2、5，所以 x_1^2 的系数为 1，x_2^2 的系数为 2，x_3^2 的系数为 5；因为矩阵 A 中的 a_{12}、a_{21} 位置的数字是 1，1×2=2，所以 x_1x_2 的系数为 2；因为矩阵 A 中 a_{13}、a_{31} 的位置的数字是 1，1×2=2，所以 x_1x_3 的系数为 2；因为矩阵 A 中 a_{23}、a_{32} 位置的数字是 4，4×2=8，所以 x_2x_3 的系数为 8。**

下面我们开始配方，由于此多项式中含三个未知数，所以我们要配三次。

首先，我们进行第一次配方（配 x_1）：关注这六项里面所有含 x_1 的项：$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$，我们要将 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 写为 $k(x_1+\Delta)^2+\mathrm{X}$ 的形式，其中常数 k 的取值与 x_1^2 的系数一样，$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 中 x_1^2 的系数是 1，所以 k=1。那么 Δ 该如何定呢？

Δ 的求法是 $\dfrac{2x_1x_2+2x_1x_3}{2kx_1}=\dfrac{2x_1x_2+2x_1x_3}{2x_1}=x_2+x_3$。

X 的求法呢？用 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-k(x_1+\Delta)^2$ 即可。所以 $\mathrm{X}=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-(x_1+x_2+x_3)^2=-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$。

综上所述：$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 配完后变为了 $(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$。

所以：

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3\\&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+2x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3\\&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_xx_3\end{aligned}$$

接着，我们进行第二次配方（配 x_2）：$(x_1+x_2+x_3)^2$ 是配出来的，我们不用管。我们现在关注 x_2^2、$4x_3^2$、$6x_2x_3$ 这三项里面所有含 x_2 的项：$x_2^2+6x_2x_3$。我们要将 $x_2^2+6x_2x_3$ 写为 $k(x_2+\Delta)^2+\mathrm{X}$ 的形式，其中常数 k 的取值与 x_2^2 的系数一样，$x_2^2+6x_2x_3$ 中 x_2^2 的系数是 1，所以 k=1。

那么Δ该如何定呢？Δ的求法是：$\dfrac{6x_2x_3}{2kx_2}=3x_3$。

X 的求法呢？用 $x_2^2+6x_2x_3-k(x_2+\Delta)^2$ 即可。所以 $\mathrm{X}=x_2^2+6x_2x_3-(x_2+3x_3)^2=-9x_3^2$。

综上所述：$x_2^2+6x_2x_3$ 配完后变为了 $(x_2+3x_3)^2-9x_3^2$。

所以：

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_2x_3\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-9x_3^2+4x_3^2\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2
\end{aligned}
$$

最后，我们进行第三次配方（配 x_3）：$(x_1+x_2+x_3)^2$、$(x_2+3x_3)^2$ 是配出来的，我们不用管。我们现在关注 $-5x_3^2$。我们要将 $-5x_3^2$ 写为 $k(x_3+\Delta)^2+\mathrm{X}$ 的形式，这我们就不用像前两次配方那么麻烦了，一眼就看出来了，Δ和 X 都是 0，k 是 5（当然，你要是不嫌麻烦的话，也可以按照前两次配方那么配：x_3^2 的系数是−5，所以 k=−5。Δ的求法是 $\dfrac{0}{2kx_3}=\dfrac{0}{-10x_3}=0$，X 的求法是用 $-5x_3^2-k(x_3+\Delta)^2$ 即可。所以 $\mathrm{X}=-5x_3^2-(-5x_3^2)=0$）。综上所述，$-5x_3^2$ 配完后不变，依然是 $-5x_3^2$。

所以：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2$$

好，现在我们把 x_1、x_2、x_3 都配完了。那么到底对角矩阵Λ以及可逆矩阵 P 是什么呢？别着急，我现在就要说。

$$
令\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=x_2+3x_3\\ y_3=x_3\end{cases}
$$

则上式变为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1{}^2+y_2{}^2-5y_3^2$。好，现在我告诉大家，$y_1{}^2$、$y_2{}^2$、$y_3^2$ 的系数就是对角矩阵Λ的对角线上的 a_{11}、a_{22}、a_{33}。

所以$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$

那么可逆矩阵P呢？很简单。

我们由$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\y_2=x_2+3x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，可解得$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+2y_3\\x_2=y_2-3y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，所以$P=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$。

现在我们把P、Λ都求出来了，我们求得的P、Λ必满足$P^TAP=\Lambda$，这道题就做完了。当然，我们也可以用方法 1 去求解P、Λ（由于本节的方法 1 与上节的方法 2 完全一样，大家都应该会了，所以此题我就不用方法 1 做了）。

通过上一道题，大家应该已经掌握了配方，但为了巩固，我们再来看一道题。接下来的题中不涉及任何新知识点，只是对刚刚讲的配方做一下巩固。

考研题 5.18 矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$，使得$P^TAP=\Lambda$。

解：由于$A^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$，所以$A^T=A$，因此矩阵$A$为对称矩阵。又由于矩阵$A$中的九个数都是实数，所以矩阵$A$为实对称矩阵。由于实对称矩阵一定可以合同于对角矩阵，所以对于此题的矩阵A来说，一定存在可逆矩阵P和对角矩阵Λ，使得$P^TAP=\Lambda$。看，此题的问题就是让大家求出可逆矩阵P和对角矩阵Λ。我们用方法 2（配方法）来求。

首先，先将矩阵A写为相应的多项式：

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4$

下面我们开始配方。

对x_1的配方结果：x_1^2

所以$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4$

对 x_2 的配方结果：x_2^2

所以 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4$

对 x_1 的配方结果：$5(x_3+\frac{4}{5}x_4)^2-\frac{16}{5}x_4{}^2$

所以 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+5(x_3+\frac{4}{5}x_4)^2-\frac{16}{5}x_4^2+5x_4^2=x_1^2+x_2^2+5(x_3+\frac{4}{5}x_4)^2+\frac{9}{5}x_4^2$

对 x_4 的配方结果：$\frac{9}{5}x_4^2$

所以 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+5(x_3+\frac{4}{5}x_4)^2+\frac{9}{5}x_4^2$

令 $\begin{pmatrix} y_1=x_1 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4 \\ y_4=x_4 \end{pmatrix}$。

则上式变为 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=y_1^2+y_2^2+5y_3^2+\frac{9}{5}y_4^2$

所以 $\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$

我们由 $\begin{pmatrix} y_1=x_1 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4 \\ y_4=x_4 \end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix} x_1=y_1 \\ x_2=y_2 \\ x_3=y_3-\frac{4}{5}y_4 \\ x_4=y_4 \end{pmatrix}$，所以 $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

5.18　小　结

经过大家的努力，大楼的第五层已经顺利完工，请看：



在这一章的前面几小节中，我给大家讲了特征值、特征向量的基本概念以及它们的求法，帮助大家复习了对称矩阵与正交矩阵，并且介绍了相似与合同的概念（两个矩阵相似与两个矩阵合同的定义式长得很像，请大家一定要区分清楚）。

然后，我告诉了大家如何证明两个矩阵具有相同的特征值，以及四个需要记住的结论，

这四个结论可以帮助大家快速解题。接着，我提到了与特征向量有关的证明题，并告诉了大家可以利用反证法来做这类题。另外，通过矩阵 A 的特征值、特征向量来求关于 A 的多项式的特征值、特征向量大家也一定要会。

接下来的内容几乎全与对角矩阵有关。大家一定要会判断一个矩阵何时能对角化，并且当一个矩阵可以对角化时，P 和 Λ 的求法也要熟练掌握。在本章最后两节中，我告诉了大家实对称矩阵一定可以相似/合同于对角矩阵。

5.19　练 习 题

1.选择题

（1）A 是三阶矩阵，P 是三阶可逆矩阵，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\.0&0&0\end{pmatrix}$，　$A\vec{a}_1=\vec{a}_1$、$A\vec{a}_2=\vec{a}_2$、$A\vec{a}_3=\vec{0}$，且 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 线性无关，则 P 是__________。

（A）　$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_1+\vec{a}_3)$　　　　（B）　$(\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_1)$

（C）　$(\vec{a}_1,\vec{a}_2,3\vec{a}_3)$　　　　（D）　$(\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{a}_2+\vec{a}_3,\vec{a}_3+\vec{a}_1)$

解：由房间 506 可知，矩阵 P 的第一列和第二列必为矩阵 A 对应于特征值 1 的两个特征向量，且这两个特征向量线性无关；矩阵 P 的第三列必为矩阵 A 对应于特征值 0 的特征向量。

由于 $A\vec{a}_1=1\times\vec{a}_1$，所以 $\vec{a}_1$ 是矩阵 A 对应于特征值 1 的特征向量；由于 $A\vec{a}_2=1\times\vec{a}_2$，所以 $\vec{a}_2$ 也是矩阵 A 对应于特征值 1 的特征向量；又由于题中说 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 线性无关，所以 $\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$ 可以作为矩阵 P 的第一列和第二列。

由于 $A\vec{a}_3=\vec{0}=0\times\vec{a}_3$，所以 $\vec{a}_3$ 是矩阵 A 对应于特征值 0 的特征向量；又因为特征值 0 是一重根（单根）特征值，所以矩阵 A 对应于特征值 0 的所有特征向量组成的向量组的最大无关组中肯定只包含一个向量，所以矩阵 A 对应于特征值 0 的所有特征向量必为：$k\vec{a}_3$，$k\neq0$。由此可知 $3\vec{a}_3$ 是矩阵 A 对应于特征值 0 的特征向量，所以 $\vec{a}_3$ 可以作为矩阵 P 的第三列。本题选择（C）选项。

答案为（C）。

（2）设 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$是可逆矩阵，且 $BA=\begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} & 2b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} \end{pmatrix}$，则 $A\sim$_____。

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

解：因为 $BA=\begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} & 2b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} \end{pmatrix}$，

而 $\begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} & 2b_{13} \\ 3b_{21} & 3b_{22} & 3b_{23} \\ -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，

所以 $BA=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，

而 $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$，

所以 $BA=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}B$　　①式

由于题中说 B 为可逆矩阵，所以 B^{-1} 存在。现在在①式的等式两侧同时右乘 B^{-1}，得：

$BAB^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}BB^{-1}$　　②式

由于矩阵乘法满足结合律，所以②式可以变为：

$$BAB^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}(BB^{-1})\qquad ③式$$

由于 $BB^{-1}=E$ ，所以③式可以变为：

$$BAB^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}E\qquad ④式$$

由于单位矩阵 E 乘以任何矩阵都等于该矩阵，所以④式可以变为：

$$BAB^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad ⑤式$$

由于 $(B^{-1})^{-1}=B$ ，所以⑤式可以变为：

$$(B^{-1})^{-1}AB^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\qquad ⑥式$$

设 $B^{-1}=P$ ，则⑥式可以变为：

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&0&0\\.0&0&-1\end{pmatrix}\qquad ⑦式$$

根据⑦式可知，（A）选项为正确选项。

答案：（A）。

2.填空题

（1）已知 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ 是 $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，则 $a=$ _______。

解：设 $\vec{a}$ 为矩阵 A^{-1} 的特征值 λ 所对应的特征向量，我们知道 λ 一定不为 0（因为，若 λ 为 0 ，由房间 502 可知，只要矩阵 A^{-1} 的任何一个特征值为 0，那么就有 $\left|A^{-1}\right|=0$ 。再由第 2 章房间 201 的大总结可知，矩阵 A^{-1} 不可逆。而事实上 A^{-1} 是可逆矩阵，所以 λ 不为 0）。根据特征值、特征向量的定义式有：

$A^{-1}\vec{a}=\lambda\vec{a}$ ①式

在①式的等式两侧同时左乘 A，得：

$AA^{-1}\vec{a}=\lambda A\vec{a}$ ②式

②式化简可得：

$\vec{a}=\lambda A\vec{a}$ ③式

将③式展开，得：

$$\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3+a\\5-a\end{pmatrix}$$

所以有：

$$\begin{cases}\lambda(1+a)=1\\\lambda(5-a)=a\end{cases}$$

解得：$a=-5$ 或 $a=1$。

（2）已知 $\vec{\xi}$ 是 A 对应于特征值 λ（λ 是单根特征值）的特征向量，则矩阵 $P^{-1}AP$ 对应于特征值 λ 的一个特征向量是_______。

解：因为 $\vec{\xi}$ 是 A 对应于单根特征值 λ 的特征向量，根据特征值、特征向量的定义式，有：$A\vec{\xi}=\lambda\vec{\xi}$。现在我们设矩阵 $P^{-1}AP$ 对应于 λ 的一个特征向量是 $\vec{\eta}$（我们最后只要解出就可以了），则有：

$P^{-1}AP\vec{\eta}=\lambda\vec{\eta}$ ①式

在①式的等式两侧同时左乘 P，得：

$PP^{-1}AP\vec{\eta}=\lambda P\vec{\eta}$ ②式

化简②式，得

$AP\vec{\eta}=\lambda P\vec{\eta}$ ③式

由于矩阵乘法满足结合律，所以③式可以变为：

$A(P\vec{\eta})=\lambda(P\vec{\eta})$ ④式

$P\vec{\eta}$是什么？是一个列向量（在第 2 章的房间 202 中讲过，方阵乘以列向量等于列向量）。由④式可以知道，向量$P\vec{\eta}$是矩阵A对应于特征值λ的特征向量。由于λ是单根特征值，$\vec{\xi}$是λ对应的所有特征向量中的一个，所以λ对应的所有特征向量必为$k\vec{\xi}(k \neq 0)$。所以有$P\vec{\eta}=k\vec{\xi}$。本题只让求“一个”，所以k随便取个值就行。我取 k=1，则$P\vec{\eta}=\vec{\xi}$，解得$\vec{\eta}=P^{-1}\vec{\xi}$。

3.计算和证明题

（1）已知$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值和特征向量，并问$A$是否可以相似于对角矩阵？

解：**先求A的特征值。**

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda E=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

令$|A-\lambda E|=0$，即：

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

解得：$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$、$\lambda_3 = 4$ 。

再求矩阵 A 对应于每个不同特征值的特征向量。

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ 时：

$$(A - \lambda E)\vec{\xi} = \vec{0} \Rightarrow (A + 2E)\vec{\xi} = \vec{0}$$

解此齐次方程组即可。

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 2$，由于 r<n，所以该齐次方程组有无穷多解。

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\quad x_3 = 0 \end{cases}$$

由于 $n - r = 3 - 2 = 1$，所以取 $x_1 = 1$，解得 $x_2 = 1$、$x_3 = 0$ 。

所以该齐次方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

所以该齐次方程组的通解为：$k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 k 是任意常数。

所以特征值−2 对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 k 是不为 0 的任意常数。

当 $\lambda_3 = 4$ 时：

$(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0} \Rightarrow (A-4E)\vec{\xi}=\vec{0}$

解此齐次方程组即可。

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36}{7} & -\frac{36}{7} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & \frac{36}{7} & -\frac{36}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=2$，由于 r<n，所以该齐次方程组有无穷多解。

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

由于 $n-r=3-2=1$，所以取 $x_2=1$，解得 $x_1=0$、$x_3=1$。

所以该齐次方程组的基础解系为：$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

所以该齐次方程组的通解为：$k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k 是任意常数。

所以特征值 4 对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，其中 k 是不为 0 的任意常数。

最后，我们来判断矩阵 A 是否可以相似于对角矩阵。

由于−2 是矩阵 A 的二重根特征值，而特征值−2 所对应的特征向量的最大无关组中只含一个向量，$1 \neq 2$，所以矩阵 A 不能相似于对角矩阵。

（2）设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，证明：$A$ 相似于 B。

解：由于 $A^T=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$，所以 $A^T=A$，因此 A 为对称矩阵。又由于矩阵 A 中的每一个数都是实数，所以 A 为实对称矩阵，同理，矩阵 B 也为实对称矩阵。因此，A 必能相似于对角阵 Λ_1，B 必能相似于对角阵 Λ_2。我们只要能证明 $\Lambda_1=\Lambda_2$，那么本题就算证完了。

我这么说的根据是什么呢？就是本章的第五车砖。我在本章的第五车砖中讲过，相似具有反身性、对称性以及传递性。那我们现在来看一下：$B\sim\Lambda_2$，若 $\Lambda_2=\Lambda_1$，则 $B\sim\Lambda_1$。根据相似的对称性有 $\Lambda_1\sim B$。又 $A\sim\Lambda_1$，根据相似的传递性有 $A\sim B$。

所以，我们只需证明 $\Lambda_1=\Lambda_2$ 即可。

我们知道，Λ_1 的对角线上的数必为 A 的特征值。

根据本章第二车砖（特征值、特征向量的计算方法）所讲的知识，我们可以求得矩阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1=4$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=-2$。

所以 $\Lambda_1=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$（当然，$\Lambda_1$ 一共有六种，我只写出了其中一种）

同理我们知道，Λ_2 的对角线上的数必为 B 的特征值。

根据本章第二车砖（特征值、特征向量的计算方法）所讲的知识，我们可以求得矩阵 B 的三个特征值为 $\lambda_1=4$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=-2$。

所以 $\Lambda_2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$（当然，$\Lambda_2$ 也是有六种取法）

由于 $\Lambda_1=\Lambda_2$，所以 $A\sim B$。

（3）设三阶实对称矩阵 A 的三个特征值为 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=2$、$\lambda_3=3$。A 的 $\lambda_1=1$、$\lambda_2=2$ 对应于的特征向量分别是 $\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$。

（1）求 A 的对应于 $\lambda_3=3$ 的一个特征向量；

（2）求 A。

解：(1) 设 A 的对应于 $\lambda_3=3$ 的一个特征向量为 $\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$。由于矩阵 A 是实对称矩阵，根据房间 508，实对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交。所以有：$\vec{\xi}_1$、$\vec{\xi}_3$ 正交，$\vec{\xi}_2$、$\vec{\xi}_3$ 正交。即：

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0\\x_1-2x_2-x_3=0\end{cases}$$

由此可得 $\vec{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$。（当然，由以上方程组解出的 x_1、x_2、x_3 可不止是 $x_1=1$、$x_2=0$、$x_3=1$ 这一组取值，有无数组。所以第一问问的是“一个”。）

（2）由题意知，必存在 P，Λ 使得：

$P^{-1}AP=\Lambda$　　　　　　①式

由①式可得

$A=P^{-1}\Lambda P$　　　　　　②式

由本章的房间 506 可知：

$$P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix},\ \Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$（当然，P 和 Λ 都不是唯一的）

通过 P 可求得 $P^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\1&-2&-1\\3&0&3\end{pmatrix}$

把 P、Λ、P^{-1} 均代入②式，得：

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\times\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\1&-2&-1\\3&0&3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13 & -2 & 5\\ -2 & 10 & 2\\ 5 & 2 & 13\end{pmatrix}$$

5.20 结尾语

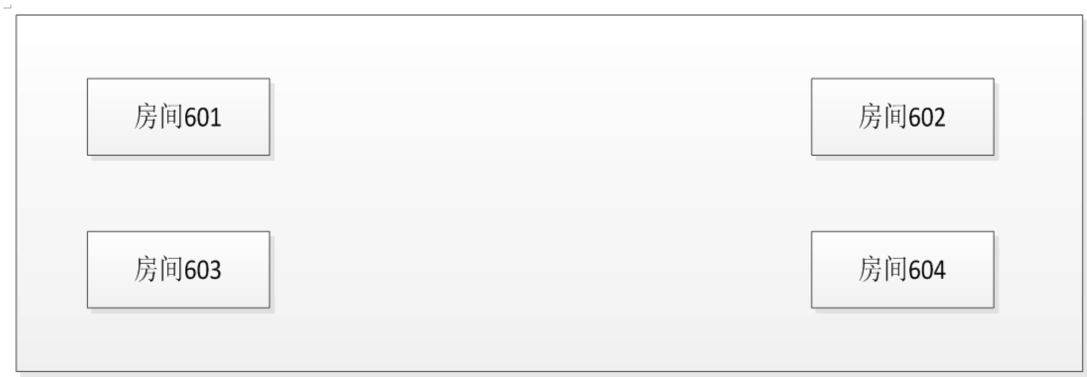
大家知道，在考研数学的三个学科中，“线性代数”是相对独立的，而“概率论与数理统计”中会涉及到很多“高等数学”的知识，所以很多同学都是先把高等数学全复习完了，再开始复习概率论与数理统计。实际上，概率论与数理统计中虽然会涉及到高等数学的知识，但这并不意味着：没复习完高等数学，概率论就不能开始复习。

下面我要跟大家说一些高等数学中的知识点，只要这些知识点会了，那么完全可以开始复习概率论与数理统计：

- 极限的计算方法（极限的定义不用管）。
- 函数的连续性。
- 常用的导数公式。
- 分段函数在分段点处如何求导。
- 不定积分、定积分、反常积分的计算方法。
- 如何利用定积分来求不规则图形的面积。
- 二重积分的计算方法（二重积分的定义不用管）。

当然了，大家也完全可以先把高等数学复习完了，再开始复习概率论与数理统计。

第 6 章　第六层——二次型



二次型就是多项式，而且是二次多项式。高中时大家连三次和四次多项式都见过，那么二次多项式又怎么会有难度呢？

6.1 第一车砖——二次型的定义

由于“二次型”这三个字从没有在前面的章节中出现过，所以同学们也许会认为二次型是一个全新的知识点，但实际上完全不是这样。

二次型的定义：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$
$$+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n$$
$$+\cdots$$
$$+a_{nn}x_n^2$$

称为 n 元二次型，简称二次型。

现在大家明白了吧，二次型只不过是每项均由“常数×变量×变量”所组成的多项式（大家上初中时就学过多项式）而已，就这么简单。

例. 判断多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 是不是三元二次型。

解：由于此多项式的每项均由“常数×变量×变量”组成（第一项 x_1^2 可以看成是 $1\times x_1\times x_1$，第二项 $2x_1x_2$ 可以看成是 $2\times x_1\times x_2$，第三项 $4x_1x_3$ 可以看成是 $4\times x_1\times x_3$，第四项 $2x_2^2$ 可以看成是 $2\times x_2\times x_2$，第五项 $6x_2x_3$ 可以看成是 $6\times x_2\times x_3$，第六项 x_3^2 可以看成是 $1\times x_3\times x_3$），所以此多项式是二次型。又由于此二次型中含三个变量 (x_1,x_2,x_3)，所以此二次型是三元二次型。

再来看一道类似的题目。

例. 判断多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 是不是三元二次型。

解：由于此多项式的每项均由“常数×变量×变量”组成（第一项 $2x_1^2$ 可以看成是 $2\times x_1\times x_1$，第二项 $3x_2^2$ 可以看成是 $3\times x_2\times x_2$，第三项 $3x_3^2$ 可以看成是 $3\times x_3\times x_3$，第四项 $-4x_2x_3$ 可以看成是 $-4\times x_2\times x_3$），所以此多项式是二次型。又由于此二次型中含三个变量 (x_1,x_2,x_3)，所以此二次型是三元二次型。

现在来看两个并非是二次型的多项式。

例. 多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 是不是三元二次型。

解：由于此多项式中的 $2x_1$ 这一项并非由“常数×变量×变量”组成（$2x_1$ 是“常数×变量”，而不是“常数×变量×变量”），所以此多项式不是二次型。连二次型都不是，就更不是三元二次型了。

例. 判断多项式 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2x_3$ 是不是三元二次型。

解：由于此多项式中的 $-4x_1x_2x_3$ 这一项并非由"常数×变量×变量"组成（$-4x_1x_2x_3$ 是"常数×变量×变量×变量"，而不是"常数×变量×变量"），所以此多项式不是二次型。连二次型都不是，就更不是三元二次型了。

6.2　第二车砖——二次型的对应矩阵

每个二次型都有对应矩阵。换句话说：**我们根据二次型就可以写出二次型的对应矩阵；我们根据二次型的对应矩阵也可以写出二次型。下面举例说明。**

例. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 的对应矩阵。

解：此二次型的对应矩阵为 $\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$。为什么呢？先来看：由于是 $x_1^2,2x_2^2,x_3^2$，所以对角线上的数是 1、2、1。再来看：由于是 $2x_1x_2$，$2\div2=1$，所以矩阵中第一行第二列的数和第二行第一列的数都是 1；由于是 $4x_1x_3$，$4\div2=2$，所以矩阵中第一行第三列的数和第三行第一列的数都是 2；由于是 $6x_2x_3$，$6\div2=3$，所以矩阵中第二行第三列的数和第三行第二列的数都是 3。

例. 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+6x_2^2-9x_3^2+7x_1x_3+9x_1x_2++8x_2x_3$ 的对应矩阵。

解：此二次型的对应矩阵为 $\begin{pmatrix}4&\frac{9}{2}&\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}&6&4\\\frac{7}{2}&4&-9\end{pmatrix}$。为什么呢？先来看：由于是 $4x_1^2,6x_2^2,-9x_3^2$，所以对角线上的数是 4，6，－9。再来看：由于是 $9x_1x_2$，$9\div2=\frac{9}{2}$，所以矩阵中第一行第二列的数和第二行第一列的数都是 $\frac{9}{2}$；由于是 $7x_1x_3,7\div2=\frac{7}{2}$，所以矩阵中第一行第三列的数和第三行第一列的数都是 $\frac{7}{2}$；由于是 $8x_2x_3$，$8\div2=4$，所以矩阵中第二行第三列的数和第三行第二列的数都是 4。

通过以上两个例子，我想大家应该会写二次型的对应矩阵了吧（一定要注意：平方项是不用除以 2 的，只有非平方项才需要除以 2），而通过二次型的对应矩阵也可以写出二次型。

例. 已知某二次型的对应矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$，请写出该二次型。

解：该二次型为 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2+10x_1x_3+16x_2x_3$。为什么呢？先来看：由于对角线是“$\begin{matrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 7 \end{matrix}$”，所以有 $x_1^2+4x_2^2+7x_3^2$。再来看：由于矩阵中第一行第二列的数和第二行第一列的数都是 2，$2\times2=4$，所以有 $4x_1x_2$；由于矩阵中第一行第三列的数和第三行第一列的数都是 5，$2\times5=10$，所以有 $10x_1x_3$；由于矩阵中第二行第三列的数和第三行第二列的数都是 8，$2\times8=16$，所以有 $16x_2x_3$。

注意：二次型的对应矩阵一定是对称矩阵。也就是说：若矩阵 A 是某二次型的对应矩阵，则矩阵 A 一定满足 $A^T=A$（所以绝对不可能出现比如“二次型的对应矩阵中第一行第二列的数和第二行第一列的数不相等”的情况）。

6.3　第三车砖——利用矩阵乘法来表示二次型

任何一个二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可以表示成 $\vec{X}^T A\vec{X}$（其中 $\vec{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$A$ 为二次型的对应矩阵）。

例. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 可以表示为：

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

如果你们不相信的话，我就来给你们验证一下：

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\times\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(x_1+x_2+2x_3 \quad x_1+2x_2+3x_3 \quad 2x_1+3x_2+x_3)$$

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\times\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(x_1+x_2+2x_3 \quad x_1+2x_2+3x_3 \quad 2x_1+3x_2+x_3)\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$
$$=(x_1+x_2+2x_3)x_1+(x_1+2x_2+3x_3)x_2+(2x_1+3x_2+x_3)x_3$$
$$=x_1^2+x_1x_2+2x_1x_3+x_1x_2+2x_2^2+3x_2x_3+2x_1x_3+3x_2x_3+x_3^2$$
$$=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$$

怎么样？现在你们相信了吧。

我们再来看一个例子。

例.二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 可以表示为：

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & -2\\0 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}。$$

6.4　第四车砖——标准形

标准形肯定是二次型，而且是特殊的二次型，特殊性体现在：只含有平方项。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 是二次型，但不是标准形。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 是二次型，但不是标准形。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2$ 是二次型，同时也是标准形。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2^2+3x_3^2$ 不是二次型，也不是标准形（如果连二次型都不是，那么就绝对不可能是标准形）。

接下来给大家讲一下正惯性指数和负惯性指数。**正惯性指数和负惯性指数是针对标准形而言的，并不是针对任意一个二次型而言的。**

那么，到底什么叫正惯性指数、负惯性指数呢？我们知道，标准形中只有平方项。**标准形中正平方项的个数称为正惯性指数，负平方项的个数称为负惯性指数。**

我们来看接下来的例题。

例. 标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2$ 的正惯性指数、负惯性指数分别是多少？

解：由于 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2$ 的三个平方项都是正平方项，没有负平方项，所以此标准形的正惯性指数是 3，负惯性指数是 0。

例.标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+x_2^2+4x_3^2$ 的正惯性指数、负惯性指数分别是多少？

解：由于 $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2+x_2^2+4x_3^2$ 的三个平方项中有两个正平方项，一个负平方项，所以此标准形的正惯性指数是 2，负惯性指数是 1。

例. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 的正惯性指数、负惯性指数分别是多少？

解：由于 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 不是标准形，所以根本不存在“它的正惯性指数、负惯性指数是多少”这种说法。这道题出的就有问题。

6.5　第五车砖——规范形

在上一节中，我告诉了大家：标准形是特殊的二次型，特殊性体现在：只含有平方项。

本节我要告诉大家的是：规范形是特殊的标准形，特殊性体现在：平方项的系数在 1、−1、0 中取值。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$ 是二次型，不是标准形，不是规范形。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$ 是二次型，不是标准形，不是规范形。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2$ 是二次型，是标准形，不是规范形。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 是二次型，是标准型，是规范形（之所以是标准形，是因为只含有平方项；之所以是规范形，是因为平方项的系数为 1、−1、1）。

例．$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ 是二次型，是标准型，是规范形（之所以是标准形，是因为只含平方项；之所以是规范形，是因为平方项的系数为 1、1）。

例．$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2^2+3x_3^2$ 不是二次型，不是标准形，不是规范形（如果连二次型都不是，那么就绝对不可能是标准形、规范形）。

最后要和大家说的是：二次型、标准形、规范形三者之间的关系像极了方阵、对角矩阵、单位矩阵三者之间的关系。

标准形是特殊的二次型（对角矩阵是特殊的方阵），而规范形又是特殊的标准形（而单位矩阵又是特殊的对角矩阵）。

6.6　第六车砖——化二次型为标准形

本节我要给大家讲“化二次型为标准形”。所谓“化二次型为标准形”，其实指的就是“把一个普通的二次型化为标准形”。

那么，到底应该怎么化呢？**只要找到一个使得 $C^TAC=\Lambda$ 成立的矩阵 $\boldsymbol{C}$，然后令 $\vec{X}=C\vec{Y}$ 就可以了。**

大家也许会感到困惑，不理解我在说什么。没有关系，别着急，我现在就来详细地给大家解释一下。

在本章的第三车砖中，我告诉过大家：任何一个二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都可以表示成 $\vec{X}^TA\vec{X}$，我们现在令 $\vec{X}=C\vec{Y}$，则 $\vec{X}^TA\vec{X}$ 就变成了 $(C\vec{Y})^TA(C\vec{Y})$，根据第 2 章的公式 $(AB)^T=B^TA^T$，可得 $(C\vec{Y})^TA(C\vec{Y})=\vec{Y}^TC^TA(C\vec{Y})$，又因为矩阵乘法满足结合律（可以随便

加括号），所以$\vec{Y}^T C^T A(C\vec{Y})=\vec{Y}^T(C^TAC)\vec{Y}$。好，如果$C^TAC=\Lambda$的话，那么$\vec{Y}^T(C^TAC)\vec{Y}$不就变为了$\vec{Y}^T\Lambda\vec{Y}$了嘛，这不就是标准形嘛（只不过未知数不是$x_i$了，而是$y_i$）！

大家明白了吧。**所以我前面说：如果想把一个普通的二次型化为标准形，那么只要找到一个使得$C^TAC=\Lambda$成立的矩阵C，然后令$\vec{X}=C\vec{Y}$就可以了。**

那么，矩阵C我们应该怎么去求呢？矩阵C的求法是我在房间601、602中要给大家讲的，现在大家只要明白“化二次型为标准形”指的是什么意思就可以了。

最后要告诉大家的是，由于对于对称矩阵A而言，上述的“矩阵C”并不唯一，所以导致“$C^TAC=\Lambda$”中的对角矩阵Λ也不唯一，因此同一个二次型很可能可以被化为不同的标准形。但是大家要记住一点：虽然同一个二次型可以化成不同的标准形，但是这些不同的标准形的正、负惯性指数肯定是一样的。

6.7 第七车砖——合同二次型

同学们，如果你们认真看了第5章，那么合同矩阵的概念你们应该已经很清楚了（设A、B是两个n阶方阵，若存在可逆矩阵C，使得$C^TAC=B$，则称矩阵A和矩阵B是合同矩阵）。那么，合同二次型是什么意思呢？

合同二次型的定义是：**若两个二次型的对应矩阵是合同矩阵，那么称这两个二次型为合同二次型**。很简单吧。

例．已知矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$和矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$是合同矩阵，问二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$和二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$是合同二次型吗？

解：由于矩阵$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$是二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$的对应矩阵，矩阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$是二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$的对应矩阵，又$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$是合同矩阵（这是题中所给的已知条件），所以二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2$和二次

型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2$ 是合同二次型。

6.8　第八车砖——正定二次型、正定矩阵

正定二次型是二次型，而且是特殊的二次型。特殊性体现在：当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零时，二次型 $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ 恒大于零。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$ 是二次型，也是正定二次型（因为当 x_1、x_2、x_3 不全为零时，$x_1^2+2x_2^2+x_3^2$ 恒大于零)。

例. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2$ 是二次型，但不是正定二次型（因为当 x_1、x_2、x_3 不全为零时，$x_1^2+2x_2^2-x_3^2$ 并不是恒大于零。比如当 $x_1=1$、$x_2=1$、$x_3=10$ 时，$x_1^2+2x_2^2-x_3^2=-97<0$）。

正定二次型的对应矩阵就叫做正定矩阵。

例. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 是正定矩阵。因为该矩阵是正定二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$ 的对应矩阵，而二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2$ 是正定二次型。

最后要提醒大家一点：正定二次型可不一定是标准形，可千万别认为只有标准形才有可能是正定二次型。例如 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$ 就是一个普通的二次型，不是标准形，但它却是正定二次型。

终于把砖运来了

同学们，你们终于把砖运来了。从现在开始，你们再也不用运砖了，因为这次运的砖已经是盖大楼的最后一层所需要的砖了。接下来，你们只需要再搭建四个房间，整个线性代数大楼就盖好了。也就是说，接下来是你们的最后一搏了。加油！

6.9 房间 601——用正交变换法化二次型为标准形

由本章的第六车砖（化二次型为标准形）可知，化二次型 $\vec{X}^T A\vec{X}$ 为标准形实际上指的就是：找到矩阵 C，使得 $C^T AC=\Lambda$。那么矩阵 C 该如何去找呢？有两种方法：

- 一是利用正交变换法找矩阵 C；
- 二是利用配方法找矩阵 C，这也正是房间 601 和房间 602 的内容。

同学们，我现在要告诉大家：房间 601 和房间 602 我根本什么也不给大家讲，只练题就行了。同学们一定很奇怪吧，这是为什么呢？

大家不妨想想，二次型 $\vec{X}^T A\vec{X}$ 中的矩阵 A 肯定是对称矩阵对吧（因为二次型的对应矩阵都是对称矩阵）。好，那么我问大家："$C^T AC=\Lambda$ 是什么？你们看着应该很眼熟吧，这指的是对称矩阵合同于对角矩阵"。

这说明什么？这说明现在我们讨论的"如何求使得 $C^T AC=\Lambda$ 成立的矩阵 C"就是第 5 章房间 510（实对称阵一定可以合同于对角矩阵）中我给大家讲的"如何求使得 $P^T AP=\Lambda$ 成立的矩阵 P"！现在大家恍然大悟了吧！

当时（第 5 章房间 510）我给大家讲过，求可逆矩阵 P 有两种方法：方法 1 就叫正交变换法，方法 2 就叫配方法。

考研题 6.1 用正交变换法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准形。

解：此题让把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准形，而且已经指定了只能用"正交变换法"。这就意味着我们只能用第 5 章房间 510 中所讲的方法 1 来求"使得 $C^T AC=\Lambda$ 成立"的 C 和 Λ，而不能用房间 510 中所讲的方法 2 来求。

此二次型的对应矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$

先求矩阵 A 的特征值。

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $|A-\lambda E|=0$

即：$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=0$

解得：$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$。

再求矩阵 A 的每个不同特征值所对应的特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时：

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(A-E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 。解出方程组 $(A-E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可。

就用第 3 章房间 302 所讲的方法求解，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

由于求解特征向量的题目我们在第 5 章练得很多，所以现在我就不具体写出求解特征向量的过程了，直接给出最终结果。

特征值 1 对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是不同时为零的任意常数。

当 $\lambda_3=10$ 时：

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(A-10E)\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $(A-10E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可。就用第 3 章房间 302 所讲的方法求解，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

还是直接给出最终结果。

特征值 10 对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，其中 k 是不为零的任意常数。

好，那么现在我们就在 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&10&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 这三个对角矩阵中任选一个作为“$C^TAC=\Lambda$”中的 Λ 吧，我选的是 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$。所以我们现在就可以知道，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准形后会变为 $y_1^2+y_2^2+10y_3^2$。

这就算做完了吗？当然没有。咱们还得求出矩阵 C，使得 $C^TAC=\Lambda$ 才行。求矩阵 C 的方法我之前已经说了，用的是第 5 章房间 510 中所讲的方法。

记 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$。由第 5 章房间 510 中所讲的方法 1 可知，我们现在需

要将 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 单位正交化。

正交化过程如下。

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\vec{b}_2=\vec{a}_2-\frac{(\vec{a}_2,\vec{b}_1)}{(\vec{b}_1,\vec{b}_1)}\times\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{-4}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$$

$\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{a}_3$ 即为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 正交化后所得的向量（由于矩阵 A 是对称矩阵，对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交，所以本来就有 $\vec{a}_1$ 与 $\vec{a}_3$ 正交、$\vec{a}_2$ 与 $\vec{a}_3$ 正交，所以 $\vec{a}_3$ 根本不用参与正交化）。

好，“正交化”进行完了，现在我们该进行“单位化”了，我们要将 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{a}_3$ 单位化。

单位化过程如下。

$$\vec{c}_1=\frac{\vec{b}_1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+0^2}}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{c}_2=\frac{\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+4^2+5^2}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{45}}\\\frac{4}{\sqrt{45}}\\\frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{c_3}=\frac{\vec{a_3}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$\vec{c_1},\vec{c_2},\vec{c_3}$ 即为 $\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{a_3}$ 单位化后所得的向量。

设 $C=(\vec{c_1},\vec{c_2},\vec{c_3})=\begin{pmatrix}\frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则有：$C^TAC=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&10\end{pmatrix}$。

好，我们终于把使得 $C^TAC=\Lambda$ 成立的矩阵 C 求出来了。

令 $\vec{X}=C\vec{Y}$，则原二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^T A\vec{X}=(C\vec{Y})^T A(C\vec{Y})=\vec{Y}^T C^T A(C\vec{Y})=\vec{Y}^T(C^TAC)\vec{Y}=\vec{Y}^T\Lambda\vec{Y}=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

这道题就做完了，我想说的是：要是只想求出原二次型化成的标准型长什么样的话，那太容易了，当求出矩阵 A 的三个特征值是 1、1、10 之后，我们立刻就知道原二次型化成的标准型长什么样了。所以这道题的问题的意思并不是“只要写出标准形就行了”，而是“让求出矩阵 C，使得：若令 $\vec{X}=C\vec{Y}$，则原二次型能变为标准形”。大家明白了吧。

考研题 6.2 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$，已知 $\lambda_1=1$ 是该二次型的对应矩阵的一个特征值。

（1）求出 a。

（2）将二次型化为标准形。

解：（1）二次形的对应矩阵为：$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$。

我们来求一下矩阵 A 的特征值。

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & a & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & a & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

令 $\left|A-\lambda E\right|=0$

即：$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & a & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$　　　①式

①式可以化简为：

$(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0$　　　②式

由于题中说 1 是矩阵 A 的一个特征值，这就说明把②式中的 λ 换成 1 时，②式一定成立。好，那我们现在就把②式中的 λ 换成 1。有：

$4-a^2=0$

解得：$a=\pm 2$。

（2）这第二问真的是太简单了。因为这第二问问的是“将二次型化为标准形”，而不是“利用正交变换法化二次型为标准形”或者“利用配方法化二次型为标准形”。这说明什么？说明我们只要能把题中所给的二次型化成的标准形写出来就大功告成了！根本不用求什么矩阵 C。

大家知道，我们只要是把矩阵 A 的三个特征值都求出来，则我们就能把标准形写出来。我都提示到这儿了，大家应该知道这第（2）问让我们干什么了吧！让我们把矩阵 A 的三个特征值都求出来。题中已经说了 $\lambda_1=1$ 是矩阵 A 的一个特征值，所以我们只要把剩下两个特征值求出来就行了。

第（1）问进行求出了 $a=\pm 2$。现在我们把 $a=\pm 2$ 代入到②式中，则有：

$(2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5)=0$ ③式

由③式我们可以解得：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=5$ 。

所以，二次型化为的标准形是：

$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$

当然，也可以是$\begin{cases}2y_1^2+y_2^2+5y_3^2\\5y_1^2+2y_2^2+y_3^2\\5y_1^2+y_2^2+2y_3^2\\2y_1^2+5y_2^2+1y_3^2\\1y_1^2+5y_2^2+2y_3^2\end{cases}$这五个中的任意一个（因为$\vec{X}=C\vec{Y}$中的$C$不唯一，所以$C^TAC=\Lambda$中的$\Lambda$肯定也不唯一）。此题不用求矩阵 C，所以我们已经做完了。

考研题 6.3 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，该二次型的对应矩阵$A$的所有特征值之和为 1，所有特征值之积为−12。

（1）求a、b的值。

（2）利用正交变换法将二次型化为标准形，并写出所作的正交变换和对应的正交矩阵。

解：（1）二次型的对应矩阵为$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix}$。由于矩阵$A$是三阶方阵，所以矩阵$A$肯定是有三个特征值，设矩阵$A$的三个特征值为$\lambda_1$、$\lambda_2$、$\lambda_3$。我在第 5 章的房间 502 中讲过：**一个矩阵的所有特征值之和等于该矩阵对角线上的所有数字之和，一个矩阵的所有特征值之积等于该矩阵所对应的行列式的值**。所以有：

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a+2+(-2)=1$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=-4a-2b^2=-12$$

解得$a=1$、$b=\pm2$，由于题中说了$b>0$，所以$b=2$，所以$a=1$、$b=2$。

（2）我来解释一下这一问的问题中“并写出所作的正交变换和对应的正交矩阵”的

意思。

“写出所作的正交变换”的意思是要把“ $\vec{X}=C\vec{Y}$ ”这个等式写上，“写出对应的正交矩阵”的意思是要把使得 $C^TAC=\Lambda$ 成立的矩阵 C 求出来，大家明白了吧。

但是实际上，就算这第（2）问根本没有后半句“并写出所作的正交变换和对应的正交矩阵”，而只有前半句“利用正交变换法将二次型化为标准形”，那么你也必须得写上 $\vec{X}=C\vec{Y}$ 并且求矩阵 C。

换句话说，只要没有像上道题一样问的是“将二次型化为标准形”，才不用写 $\vec{X}=C\vec{Y}$ 和求矩阵 C。否则的话（比如问的是“利用正交变换法将二次型化为标准形”或“利用配方法将二次型化为标准形”），必须得写上 $\vec{X}=C\vec{Y}$ 并且求矩阵 C。

把第一问求得的 $a=1$、$b=\pm 2$ 代入到二次型的对应矩阵 A 中，得 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\2&0&-2\end{pmatrix}$。

然后就按照前面的考研题 6.1那么做就可以了。

由于接下来的做法与考研题 6.1是一样的，因为我只给出最终答案（答案不唯一）。

$$C=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

令 $\vec{X}=C\vec{Y}$，则原二次型即可化为标准形 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$。

6.10　房间 602——
用配方法化二次型为标准形

本节也只是练题而已，因为本节所涉及到的方法是第 5 章房间 510 的方法 2，早就讲过了。

考研题6.4 用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3$ 为标准形，求出所作的可逆线性变换矩阵 C。

解：由上一道题可知，就算此题的问题只说用配方法将二次型化为标准形，而没让求矩阵 C，那也必须求矩阵 C（更何况这道题明确地让求矩阵 C 了）。

下面我们开始配方，由于此多项式中含三个未知数，所以我们要配三次。

第一次配方（配 x_1）：

关注这六项里面所有含 x_1 的项：$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$，我们要将 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 写为 $k(x_1+\Delta)^2+\mathrm{X}$ 的形式，其中常数 k 的取值与 x_1^2 的系数一样，$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 中 x_1^2 的系数是 1，所以 k=1。

那么 Δ 该如何定呢？Δ 的求法是 $\dfrac{2x_1x_2+2x_1x_3}{2kx_1}=\dfrac{2x_1x_2+2x_1x_3}{2x_1}=x_2+x_3$。

X 的求法呢？用 $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-k(x_1+\Delta)^2$ 即可，所以 $X=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-(x_1+x_2+x_3)^2=-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$。

综上所述：$x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3$ 配完后变为了 $(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2$

所以：

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+8x_2x_3\\
&=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+2x_2^2+5x_3^2+8x_2x_3\\
&=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_xx_3
\end{aligned}
$$

第二次配方（配 x_2）：

$(x_1+x_2+x_3)^2$ 是配出来的，我们不用管。我们现在关注 x_2^2、$4x_3^2$、$6x_2x_3$ 这三项里面所有含 x_2 的项：$x_2^2+6x_2x_3$。我们要将 $x_2^2+6x_2x_3$ 写为 $k(x_2+\Delta)^2+X$ 的形式，其中常数 k 的取值与 x_2^2 的系数一样，$x_2^2+6x_2x_3$ 中 x_2^2 的系数是 1，所以 k=1。

那么 Δ 该如何定呢？Δ 的求法是：$\dfrac{6x_2x_3}{2kx_2}=3x_3$。

X 的求法呢？用 $x_2^2+6x_2x_3-k(x_2+\Delta)^2$ 即可，所以 $X=x_2^2+6x_2x_3-(x_2+3x_3)^2=-9x_3^2$。

综上所述：$x_2^2+6x_2x_3$ 配完后变为了 $(x_2+3x_3)^2-9x_3^2$。

所以：

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_3^2+6x_2x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-9x_3^2+4x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2 \end{aligned}$$

第三次配方（配 x_3）：

$(x_1+x_2+x_3)^2$、$(x_2+3x_3)^2$ 是配出来的，我们不用管。我们现在关注 $-5x_3^2$，我们要将 $-5x_3^2$ 写为 $k(x_3+\Delta)^2+X$ 的形式，这就不用像前两次配方那么麻烦了，一眼就看出来了，Δ 和 X 都是 0，k 是 5（当然，你要是不嫌麻烦的话，也可以按照前两次配方那么配：x_3^2 的系数是−5，所以 k=−5。Δ 的求法是 $\dfrac{0}{2kx_3}=\dfrac{0}{-10x_3}=0$。$X$ 的求法是用 $-5x_3^2-k(x_3+\Delta)^2$ 即可。所以 $X=-5x_3^2-(-5x_3^2)=0$）。综上所述，$-5x_3^2$ 配完后不变，依然是 $-5x_3^2$。

所以：

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2$$

上述配方过程其实我早已在第 5 章的房间 510 中给大家讲过了（接下来的过程在第 5 章的房间 510 中也都讲过了）。好，现在我们把 x_1、x_2、x_3 都配完了。接下来我们求 $C^TAC=\Lambda$ 中的对角矩阵 Λ 以及矩阵 C。

令 $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3 \\ y_2 = x_2+3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

则上式变为 $f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2-5y_3^2$。$y_1^2$、$y_2^2$、$y_3^2$ 的系数就是对角矩阵 Λ 的对角线上的 a_{11}、a_{22}、a_{33}。

所以：$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

然后我们求矩阵 C。

我们由 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 3x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$，可解得 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，所以 $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

好，我们终于把矩阵 C 求出来了。求出的这个矩阵 C 满足：

$$C^T AC = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}。$$

令 $\vec{X} = C\vec{Y}$，则原二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3) = \vec{X}^T A\vec{X} = (C\vec{Y})^T A(C\vec{Y}) = \vec{Y}^T C^T A(C\vec{Y}) = \vec{Y}^T (C^T AC)\vec{Y} = \vec{Y}^T \Lambda \vec{Y} = y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2$$

考研题 6.5 用配方法将二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3$ 化成标准形、规范形。

解：此题我就不那么详细地写出配方的过程了（但是实际上还是像上道题那样一点一点配的，只不过我就不写那么啰嗦了而已）。

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 - x_2^2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + 3x_3)^2 - 9x_3^2 - 2x_2x_3 - x_2^2 \\ &= (x_1 + 3x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 8x_3^2 \end{aligned}$$

即：$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + 3x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 8x_3^2$

令：$\begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

则上式变为 $f(x_1,x_2,x_3) = y_1{}^2 - y_2{}^2 - 8y_3^2$，$y_1{}^2$、$y_2{}^2$、$y_3^2$ 的系数就是对角矩阵 Λ 的对角线上的 a_{11}、a_{22}、a_{33}。

所以：$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}$。

然后我们求矩阵 C。

我们由 $\begin{cases}y_1=x_1+3x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，可解得 $\begin{cases}x_1=y_1-3y_3\\x_2=y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}$，所以 $C=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$。

好，我们终于把矩阵 C 求出来了。求出的这个矩阵 C 满足：

$$C^TAC=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-8\end{pmatrix}。$$

令 $\vec{X}=C\vec{Y}$，则原二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^T A\vec{X}=(C\vec{Y})^T A(C\vec{Y})=\vec{Y}^T C^T A(C\vec{Y})=\vec{Y}^T(C^TAC)\vec{Y}=\vec{Y}^T\Lambda\vec{Y}=y_1^2-y_2^2-8y_3^2$$

好，这道题我们做完了吗？并没有做完。大家仔细看看，这道题有两问。第一问是：将二次型化为标准形。第二问是：将二次型化为规范形。第一问我们是做完了，可第二问我们还没做呢（这也正是我出此题的目的，上一道题只让化标准形，而没让化规范形）。

首先，咱们来复习一下“规范形”。在本章的第五车砖中，我给大家讲了规范形。**规范形是特殊的标准形，特殊性体现在：平方项的系数在 1、−1、0 中取值。**

由此可知，要想将一个普通的二次型化为规范形，那么必须先化为标准形，进而才能**化为规范形。**

也就是说，就算此题没有第一问而只有第二问，那咱们也必须得先将题中所给的二次型化为标准形。

好，那么现在同学们不禁要问了：“此题我们已经化为标准形了，然后该怎么化为规范形啊？”非常简单。同学们请看，此标准形的三个平方项的系数分别为：1、−1、8。只有“8”我们需要处理（因为“8”并非 1、－1、0 这三个数之中的数），“1”和“−1”我们都不需要处理。那么我们到底应该怎么处理呢？

令 $\begin{cases}y_1=z_1\\y_2=z_2\\y_3=\dfrac{1}{\sqrt{8}}z_3\end{cases}$

则 $y_1^2-y_2^2-8y_3^2$ 就变为了 $z_1^2-z_2^2-z_3^2$，这不就是规范形了嘛。这道题我们就做完了。

需要提醒大家的是：并不是说只有这道题化规范形的方法是“引入与 y 有关的 z”，而是所有化规范形的题的解题方法都是“引入与 y 有关的 z，使得标准形的所有平方项的系数都变为 1 或−1。”

考研题 6.6 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 的标准形是________。

（A）$3y_1^2-y_2^2-2y_3^2$ （B）$-3y_1^2-y_2^2-2y_3^2$

（C）$-2y_1^2+y_2^2$ （D）$2y_1^2+y_2^2+3y_3^2$

解：这是一道选择题，没有指定用什么方法，所以我们用正交变换法或用配方法做都可以，而且我们也根本不用求出使得 $C^TAC=\Lambda$ 成立的矩阵 C，我们只要求出题中所给的二次型化成的标准形是什么样就可以了。换句话说，我们只要求出对角矩阵 Λ 就可以了。

我刚才说了，我们用正交变换法或用配方法做都可以，不妨就用配方法做吧。

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3\\&=2(x_1-x_2)^2-x_2^2-2x_2x_3-4x_3^2\\&=2(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2-3x_3^2\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1-x_2\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 化成的标准形是：$2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$。

然而，这四个选项都不是 $2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$，这可怎么办呢？大家还记得本章第六车砖（化二次型为标准形）中的最后一句话吗？那句话是这样说的：**虽然同一个二次型可以化成不同的标准形，但是这些不同的标准形的正、负惯性指数肯定是一样的。**好，那么现在我们来看，标准形 $2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$ 的正惯性指数是 1，负惯性指数是 2。由此可知：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$。虽然还可以被化为其他标准形，但正惯性指数肯定是 1，负惯性指数肯定是 2。所以我们立刻就可以知道本题的正确选项是（A）选项。

答案：（A）。

6.11　房间 603——两个对称矩阵合同的充分必要条件

在第 5 章的第七车砖中，我给大家介绍了两个矩阵合同的定义。设 A、B 是两个 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{T}AP=B$，则称 A 合同于 B，记为 $A\approx B$。

可是实际上，我们很难通过定义来判断两个矩阵是否合同。例如：矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，若想通过定义来判断这两个矩阵是否合同的话，我们就需要去找矩阵 P。可是矩阵 P 哪这么好找啊，要是我们没找到矩阵 P 呢，那也不能说明使得 $P^{\mathrm{T}}AP=B$ 成立的矩阵 P 就没有吧。所以我说，我们很难通过定义来判断两个矩阵是否合同。

于是人们就想了，除了定义之外，两个矩阵合同有没有充分必要条件呢？结果人们发现，当 A、B 都是对称矩阵时，A、B 合同的确是有充分必要条件的。但若 A、B 中至少一个矩阵不是对称矩阵，那 A、B 合同就没有充分必要条件了。

同学们现在一定迫不及待地想知道：当 A、B 都是对称矩阵时，A、B 合同的充分必要条件是什么。别急，我马上就要说了。

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$、对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 合同 $\Leftrightarrow$ 将对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写为相应的二次型 f_A，将对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也写为相应的二次型 f_B。然后将 f_A 化为标准形 f_A'，将 f_B 化为标准形 f_B'。标准形 f_A' 与标准形 f_B' 的正惯性指数、负惯性指数均相同。

考研题 6.7　下列矩阵中与 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 合同的矩阵是_______。

（A）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

解：由于此题所给的矩阵 A 以及四个选项中所给的矩阵都是对称矩阵，所以可以用刚刚讲的充分必要条件来做。

本题所给的矩阵 A 对应的二次型 $f_A = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2$，我们现在要把这个二次型化为标准形。用正交变换法或者用配方法都可以，就用配方法吧。

$$\begin{aligned} f_A &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

所以二次型 f_A 化为标准形以后得 $f_A' = y_1^2 - 3y_2^2 + y_3^2$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1。

好，然后我们来看四个选项中所给的矩阵。这道题非常简单，简单之处就在于：四个选项中所给的矩阵所对应的二次型本身就是标准形！不用再化了！

那么现在，我们就把这四个选项中所给的矩阵写为对应的标准形吧。

选项中所给的矩阵对应的标准形为：$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$，正惯性指数为 3，负惯性指数为 0。

选项中所给的矩阵对应的标准形为：$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$，正惯性指数为 2，负惯性指数为 1。

选项中所给的矩阵对应的标准形为：$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$，正惯性指数为 1，负惯性指数为 2。

选项中所给的矩阵对应的标准形为：$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$，正惯性指数为 0，负惯性指数为 3。

而标准形 $f_A' = y_1^2 - 3y_2^2 + y_3^2$ 的正惯性指数为 2，负惯性指数为 1，由对称矩阵合同的充分必要条件可知，（B）选项为正确选项。

答案：（B）。

6.12　房间 604——

正定二次型、正定矩阵的证明方法

在本章的第八车砖中，我给大家讲了正定二次型、正定矩阵的定义。我们先来回顾一下。**正定二次型是**二次型，**而且是特殊的二次型。特殊性体现在：当** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ **不全为零时，二次型恒大于零时，二次型** $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **恒大于零。正定二次型的对应矩阵就叫做正定矩阵（由此可知正定矩阵一定是对称矩阵，因为任何一个二次型的对应矩阵都是对称矩阵）。**

好，回顾完正定二次型、正定矩阵的定义后，我们来看看正定二次型、正定矩阵的证明方法。

6.12.1　正定矩阵的证明方法

首先先来看正定矩阵的证明方法，正定矩阵的证明方法一共有五种。

1.正定矩阵的第一种证明方法

若矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 的所有特征值都大于 0，则矩阵 A 为正定矩阵。

注意：这不是单向的，而是充分必要条件。充分必要条件意味着什么？意味着：如果矩阵 A 不满足“矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 的所有特征值都大于 0”，则矩阵 A 一定不是正定矩阵。

例. 试证明矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵。

解：由于 $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，所以 $A^T=A$，所以矩阵 A 为对称矩阵；由于矩阵 A 的三个特征值为：$\lambda_1=1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=10$（计算过程省略），所以矩阵 A 的所有特征值都大于 0。

综上所述（矩阵 A 为对称矩阵且矩阵 A 的所有特征值都大于 0），矩阵 A 是正定矩阵。

例. 试证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 不是正定矩阵。

解：由于 $A^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$，所以 $A^T=A$，所以矩阵 A 为对称矩阵；由于矩阵 A 的三个特征值为：$\lambda_1=-1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=1$（计算过程省略），所以矩阵 A 的所有特征值并非都大于 0。

综上所述（矩阵 A 为对称矩阵且矩阵 A 的所有特征值并非都大于 0），不满足矩阵 A 是正定矩阵的充分必要条件，因此矩阵 A 一定不是正定矩阵。

2.正定矩阵的第二种证明方法

若矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 的所有顺序主子式都大于 0，则矩阵 A 为正定矩阵。

注意：这不是单向的，而是充分必要条件。充分必要条件意味着什么？意味着：如果矩阵 A 不满足"矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 的所有顺序主子式大于 0"，则矩阵 A 一定不是正定矩阵。

另外，大家可能对于"顺序主子式"这个概念并不清楚。没关系，看下面的例题吧。

例. 试证明矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$ 是正定矩阵。

解：这道题我们刚才做过，现在我又把这道题写在这儿了，因为这次我们要用刚刚讲的"正定矩阵的第二种证明方法"来做。

由于 $A^T=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，所以 $A^T=A$，所以矩阵 A 为对称矩阵；由于矩阵 A 是三阶方阵，所以矩阵 A 必然存在：一阶顺序主子式、二阶顺序主子式、三阶顺序主子式（顺序主子式是针对方阵而言的，几阶方阵就有几个顺序主子式）。

矩阵 A 的一阶顺序主子式为（取第一行、第一列）：$|2|=2$；

矩阵 A 的二阶顺序主子式为（取第一、二行，第一、二列）：$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6$；

矩阵 A 的三阶顺序主子式为（取第一、二、三行，第一、二、三列）：$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = 10$。

所以矩阵 A 的所有顺序主子式都大于 0。

综上所述（矩阵 A 为对称矩阵且矩阵 A 的所有顺序主子式都大于 0），矩阵 A 是正定矩阵。

3.正定矩阵的第三种证明方法

若矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 与单位矩阵 E 合同，则矩阵 A 为正定矩阵。

注意：这不是单向的，而是充分必要条件。充分必要条件意味着：如果矩阵 A 不满足“矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 与单位矩阵 E 合同”，则矩阵 A 一定不是正定矩阵。

例. 试证明矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 是正定矩阵。

解：此题我们用刚刚讲的“正定矩阵的第三种证明方法”来证明。

由于 $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，所以 $A^T = A$，所以矩阵 A 为对称矩阵；接下来我们只需证明矩阵 A 与单位矩阵 E（$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$）合同即可，我们就用上一个房间（房间 603）中所讲的两个对称矩阵合同的充分必要条件来证明吧。

矩阵 A 对应的二次型为：$f_A = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2$，由于 f_A 已经是标准形了，所以 $f_A' = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2$，正惯性指数为 3，负惯性指数为 0。

单位矩阵 E 对应的二次型为：$f_B = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$，由于 f_B 已经是标准形了，所以

$f_B' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$，正惯性指数为 3，负惯性指数为 0。

由于标准形 f_A' 与标准形 f_B' 的正惯性指数、负惯性指数均相同，根据房间 603 可知，矩阵 A 与单位矩阵 E 合同。

综上所述（矩阵 A 为对称矩阵且矩阵 A 与单位矩阵 E 合同），矩阵 A 是正定矩阵。

4.正定矩阵的第四种证明方法

若矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 可表示为 $A = C^T C$（其中 C 为可逆矩阵），则矩阵 A 为正定矩阵。

注意：这不是单向的，而是充分必要条件。充分必要条件意味着：如果矩阵 A 不满足“矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 可表示为 $A = C^T C$（其中 C 为可逆矩阵）”，则矩阵 A 一定不是正定矩阵。

考研题 6.8 已知 n 阶矩阵 A 是正定矩阵，证明矩阵 A^{-1} 也是正定矩阵。

解：此题我们用刚刚讲的“正定矩阵的第四种证明方法”来证明。

由于矩阵 A 是正定矩阵，所以矩阵 A 一定是对称矩阵（正定矩阵一定是对称矩阵，这一点大家一定要牢记），所以有 $A^T = A$。

我们先来证明 A^{-1} 是对称矩阵，证法如下。

记 A^{-1} 为矩阵 B，由于 A、B 互为逆矩阵，根据可逆矩阵的定义，有 $AB=E$、$BA=E$。由于 $AB=E$，所以 $(AB)^T = E^T$。又因为 $E^T = E$，所以 $(AB)^T = E$。又由于 $(AB)^T = B^T A^T$，所以 $B^T A^T = E$。由于 $A^T = A$，所以 $B^T A = E$。

好，现在我们对比一下 $BA = E$ 和 $B^T A = E$，立刻可得：$B^T = B$。所以矩阵 B 是对称矩阵，即 A^{-1} 是对称矩阵。

我们再来证明存在可逆矩阵 C，使得 $B = C^T C$。证法如下。

由于矩阵 A 是正定矩阵（这是题目的已知条件），由“正定矩阵的第四种证明方法”可知，存在可逆矩阵 D，使得：

$$A = D^T D \qquad ①式$$

①式的等式两侧求逆，得：

$A^{-1}=(D^TD)^{-1}$　　②式

由于 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，所以②式可以变为：

$A^{-1}=D^{-1}(D^T)^{-1}$　　③式

由于任意一个矩阵 A 都满足 $(A^T)^T=A$，所以③式可以变为：

$A^{-1}=((D^T)^T)^{-1}(D^T)^{-1}$　　④式

由第 2 章的公式 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$，再结合④式，有：

$A^{-1}=((D^T)^{-1})^T(D^T)^{-1}$　　⑤式

记可逆矩阵 $(D^T)^{-1}$ 为矩阵 C，则⑤式变为：

$A^{-1}=C^TC$　　⑥式

综上所述【矩阵 A^{-1} 是可逆矩阵并且矩阵 A^{-1} 满足 $A^{-1}=C^TC$（其中矩阵 C 为可逆矩阵）】，所以矩阵 A^{-1} 是正定矩阵。

5.正定矩阵的第五种证明方法

若矩阵 A 是正定矩阵，则所有与矩阵 A 合同的矩阵都是正定矩阵。

例. $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，矩阵 B 与矩阵 A 合同，试证明矩阵 B 是正定矩阵。

解：由于 $A^T=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，所以 $A^T=A$，所以矩阵 A 为对称矩阵；由于矩阵 A 的三个特征值为：$\lambda_1=1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=10$（计算过程省略），所以矩阵 A 的所有特征值都大于 0。

综上所述（矩阵 A 为对称矩阵且矩阵 A 的所有特征值都大于 0），矩阵 A 是正定矩阵。又由于矩阵 B 与矩阵 A 合同，根据“正定矩阵的第五种证明方法”可知，矩阵 B 是正定矩阵。

6.12.2 正定二次型的证明方法

我们再看正定二次型的证明方法，正定二次型的证明方法一共有三种。

1.正定二次型的第一种证明方法

通过正定二次型的定义来证明。

例. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是正定二次型，因为当 x_1、x_2、x_3 不全为 0 时，$x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 恒大于 0。

例. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 不是正定二次型，因为当 x_1、x_2、x_3 不全为 0 时，$x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 并不是恒大于 0（例如：$x_1=0$、$x_2=1$、$x_3=0$ 当时，$x_1^2-x_2^2+x_3^2=-1<0$）。

例. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ 不是正定二次型，因为当 x_1、x_2、x_3 不全为 0 时，$x_1^2+x_2^2$ 并不是恒大于 0（例如：当 $x_1=0$、$x_2=0$、$x_3=1$ 时，$x_1^2+x_2^2=0$）。

但是大家一定要注意，如果此题的二次型变为 $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$，那么就是正定二次型。

2.正定二次型的第二种证明方法

将所给二次型化为标准形（用正交变换法或者用配方法都可以），若标准形的正惯性指数等于 n（n 为未知数的个数。也就是说，f 后面的括号里写了几个未知数，n 就是几），则该二次型为正定二次型。

注意：这不是单向的，而是充分必要条件。充分必要条件意味着：如果将所给二次型化为标准形后，标准形的正惯性指数不等于 n，则所给二次型一定不是正定二次型。

例. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 是不是正定二次型？

解：我们将所给二次型化为标准形（利用配方法）。

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3 \\ &= 2(x_1-x_2)^2-x_2^2-2x_2x_3-4x_3^2 \\ &= 2(x_1-x_2)^2-(x_2+x_3)^2-3x_3^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_3^2-4x_1x_2-2x_2x_3$ 化成的标准形是：$2y_1^2-y_2^2-3y_3^2$。

正惯性指数是 1，而 n 是 3，由于 $1\neq3$，所以该二次型不是正定二次型。

3.正定二次型的第三种证明方法

若二次型的对应矩阵为正定矩阵，则该二次型为正定二次型。

这“正定二次型的第三种证明方法”真是太好了，这说明我们前面所讲的那五种证明正定矩阵的方法其实也可以用来证明正定二次型。

例. 证明二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 是正定二次型。

解：此二次型的对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，我们只要能证明矩阵 A 是正定矩阵就可以了。

由于 $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，所以 $A^T=A$，所以矩阵 A 为对称矩阵；由于矩阵 A 的三个特征值为：$\lambda_1=1$、$\lambda_2=1$、$\lambda_3=10$（计算过程省略），所以矩阵 A 的所有特征值都大于 0。

综上所述（矩阵 A 为对称矩阵且矩阵 A 的所有特征值都大于 0），矩阵 A 是正定矩阵。所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$ 是正定二次型。

6.13 小 结

同学们，经过这么长时间的不懈努力，线性代数大楼终于盖完了。每层的房间数为：第一层四个房间、第二层八个房间、第三层八个房间、第四层六个房间、第五层十个房间、第六层四个房间。来欣赏一下自己所盖的大楼吧：



本章的全部讨论都是围绕着“二次型”进行的。二次型其实就是多项式而已，只不过每项的形式都是“常数×未知数×未知数”罢了。

标准形呢，其实也是二次型，只不过是特殊的二次型而已，而规范形则又是特殊的标准形。

当然了，二次型可以化为标准形（利用正交变换法或利用配方法），进而还可以化为规范形。

合同二次型也是一个不容忽视的知识点。如果两个二次型的对应矩阵是合同矩阵，则这两个二次型称为合同二次型。

正定二次型与标准形一样，都是特殊的二次型，但是正定二次型的特殊性体现在“二次型的值”上，而标准形的特殊性体现在“二次型的形式”上。另外，正定二次型的证明方法大家一定要牢记。

6.14　练 习 题

1.选择题

（1）A、B 都是 n 阶实对称阵，则 A，B 合同的充分必要条件是________。

（A）A、B 有相同的秩

（B）A、B 都合同于对角阵

（C）A、B 的全部特征值相同

（D）A、B 所对应的二次型化为的标准形有相同的正负惯性指数

解：这道题真是太容易了，考的就是房间 603。根据房间 603 直接可得（D）选项为本题的正确选项。

答案：（D）。

（2）下列矩阵中正定矩阵是________。

（A）$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&2\\-2&2&4\end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&5&0\\0&-1&-2\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$

解：本题考的是房间 604。我们就用房间 604 中所讲的“**正定矩阵的第二种证明方法：若矩阵 A 为对称矩阵并且矩阵 A 的所有顺序主子式都大于 0，则矩阵 A 为正定矩阵**”来做。

（A）选项：

$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的一阶顺序主子式为：$|1|=1$

$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的二阶顺序主子式为：$\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1$

$\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$的三阶顺序主子式就不用算了，因为二阶顺序主子式小于 0，所以（A）选项肯定不对。

（B）选项：

$\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&2\\-2&2&4\end{pmatrix}$的一阶顺序主子式为：$|2|=2$

$\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&2\\-2&2&4\end{pmatrix}$的二阶顺序主子式为：$\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}=-1$

$\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&2\\-2&2&4\end{pmatrix}$的三阶顺序主子式就不用算了，因为二阶顺序主子式小于 0，所以（B）

选项肯定不对。

（C）选项：

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$的一阶顺序主子式为：$|1| = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$的二阶顺序主子式为：$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$的三阶顺序主子式为：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = -16$

由于$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$的三阶顺序主子式小于 0，所以（C）选项肯定不对。

（D）选项：

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$的一阶顺序主子式为：$|2| = 2$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$的二阶顺序主子式为：$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$的三阶顺序主子式为：$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2$

由于$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$的所有顺序主子式都大于 0，所以$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$是正定矩阵，所以

（D）选项为本题的正确选项。

答案：（D）。

2.填空题

（1）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3)(a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3)$，则该二次型的对应矩阵是__________。

解：这道题很简单，把题中所给的二次型化简一下就可以了。

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3)(a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3)\\&=a_1a_2x_1^2+b_1b_2x_2^2+c_1c_2x_3^2+(a_2b_1+a_1b_2)x_1x_2+(a_2c_1+a_1c_2)x_1x_3+(b_2c_1+b_1c_2)x_2x_3\end{aligned}$$

所以该二次型的对应矩阵是：$\begin{pmatrix}a_1a_2 & \dfrac{a_2b_1+a_1b_2}{2} & \dfrac{a_2c_1+a_1c_2}{2}\\ \dfrac{a_2b_1+a_1b_2}{2} & b_1b_2 & \dfrac{b_2c_1+b_1c_2}{2}\\ \dfrac{a_2c_1+a_1c_2}{2} & \dfrac{b_2c_1+b_1c_2}{2} & c_1c_2\end{pmatrix}$

（2）设 $A=\begin{pmatrix}k & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k+2\end{pmatrix}$ 正定，则 k 应满足条件__________。

解：本题考的房间 604，我们就用房间 604 中所讲的“正定矩阵的第二种证明方法：

若矩阵 *A* 为对称矩阵并且矩阵 *A* 的所有顺序主子式都大于 0，则矩阵 *A* 为正定矩阵” 来做。

由于题中明确说矩阵 A 为正定矩阵，所以矩阵 A 的所有顺序主子式肯定都大于 0。即

$|k|>0$　　①式

$\begin{vmatrix}k & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}>0$　　②式

$\begin{vmatrix}k & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k+2\end{vmatrix}>0$　　③式

由①式解得：$k>0$，由②式解得 $k>1$，由③式解得，$k>1$ 或 $k<-2$，取交集得：$k>1$。

3.计算和说明题

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$

（1）写出该二次型的对应矩阵。

（2）用正交变换法化二次型为标准形。

解：（1）该二次型的对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$。

（2）**我们先来求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。**

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda E=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}3-\lambda & 2 & 4\\ 2 & -\lambda & 2\\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 4\\ 2 & -\lambda & 2\\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

令 $|A-\lambda E|=0$

即 $\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 4\\ 2 & -\lambda & 2\\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=-1$、$\lambda_3=8$。

我们再来求矩阵 A 的每个不同特征值所对应的特征向量。

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时：

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(A+E)\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $(A+E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可。就用第 3 章房间 302 所讲的方法求解，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

由于求解特征向量的题目我们在第 5 章练得很多，所以现在我就不具体写出求解特征向量的过程了，直接给出最终结果。

特征值−1 对应的特征向量为：$k_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 是不同时为零的任意常数。

当 $\lambda_3=8$ 时：

齐次方程组 $(A-\lambda E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 变为了 $(A-8E)\vec{\xi}=\vec{0}$。解出方程组 $(A-8E)\vec{\xi}=\vec{0}$ 的通解即可。就用第 3 章房间 302 所讲的方法求解，但是不要忘记通解中的任意常数不能同时为 0。

直接给出特征向量的最终结果。

特征值 8 对应的特征向量为：$k\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，其中 k 是不为零的任意常数。

记 $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\vec{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\vec{a}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$。由第 5 章房间 510 中所讲的方法 1 可知，我们现在需要将 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ 单位正交化。

正交化过程如下。

取 $\vec{b}_1=\vec{a}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{b_2}=\vec{a_2}-\frac{(\vec{a_2},\vec{b_1})}{(\vec{b_1},\vec{b_1})}\times\vec{b_1}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{a_3}$ 即为 $\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}$ 正交化后所得的向量（由于矩阵 A 是对称矩阵，对称矩阵的两个来自于不同特征值的特征向量必正交，所以本来就有 $\vec{a_1}$ 与 $\vec{a_3}$ 正交、$\vec{a_2}$ 与 $\vec{a_3}$ 正交，所以 $\vec{a_3}$ 根本不用参与正交化）。

好，“正交化”进行完了，现在我们该进行“单位化”了，我们要将 $\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{a_3}$ 单位化。

单位化过程如下。

$$\vec{c_1}=\frac{\vec{b_1}}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{c_2}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2+4^2+(-1)^2}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\\\frac{4}{3\sqrt{2}}\\-\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\vec{c_3}=\frac{\vec{a_3}}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$\vec{c_1},\vec{c_2},\vec{c_3}$ 即为 $\vec{b_1},\vec{b_2},\vec{a_3}$ 单位化后所得的向量。

设 $C=(\vec{c_1},\vec{c_2},\vec{c_3})=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$，则有：$C^TAC=\Lambda=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$。

好，我们终于把使得 $C^TAC=\Lambda$ 成立的矩阵 C 求出来了。

令 $\vec{X}=C\vec{Y}$，则原二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\vec{X}^T A\vec{X}=(C\vec{Y})^T A(C\vec{Y})=\vec{Y}^T C^T A(C\vec{Y})=\vec{Y}^T(C^TAC)\vec{Y}=\vec{Y}^T\Lambda\vec{Y}=-y_1^2-y_2^2+8y_3^2$$

6.15 结尾语

同学们，大楼的所有房间都已盖好，现在请你们拿出一张白纸，把从第 1 章到第 6 章的所有房间中的知识点统一默写一遍，看看有没有遗忘的，如果有的话，要及时地查漏补缺。

除了默写之外，大量做题也是巩固房间中的知识点的一个极好的方法，所以大家一定要多做题。我给大家一个建议，你们只做历年考研真题就可以了，模拟题根本不用做，最好是近 20 年的真题都做，而且要反复做。

只要同学们把本书第 1 章到第 6 章的所有房间中的知识点都掌握，那么，考研数学线性代数部分得满分是很容易的。

最后，祝大家考研取得好成绩。